Physique Générale

ELECTRICITE

1 ELECTROSTATIQUE

Exercices corrigés

Mohamed AKBI

LICENCE
INGENIORAT

Exercices d'électrostatique

ELECTRICITE
1 ELECTROSTATIQUE

Exercices corrigés

Mohamed AKBI
Diplômé USTHB (Alger)
Docteur d'Université Blaise Pascal
(Clermont-Ferrand, France)
Maître de conférences

LICENCE
INGENIORAT

Du même auteur

Dans la collection Physique Générale

ELECTRICITE

Tome 1, Electrostatique du vide. *Cours et exercices corrigés, 352 pages*

Tome 2, Electrocinétique, courant continu. *Cours et exercices corrigés, 160 pages*

Tome 3, Electromagnétisme, courant alternatif. *Cours et exercices corrigés (à paraître)*

Dans la collection Physique +

ELECTROSTATIQUE

1. Charges et champs électriques. *L'essentiel du cours et 50 exercices corrigés, 192 pages*

2. Potentiel et énergie électrostatiques. *L'essentiel du cours et 50 exercices corrigés, 288 pages*

3. Théorème de Gauss et conducteurs. *L'essentiel du cours et 50 exercices corrigés, 264 pages*

Première édition
Alger, décembre 2006

N° Dépôt Légal 3281-2006
ISBN 9961-9581-5-2

TABLE DES EXERCICES

1. Charges électriques

2. Champ électrostatique

3. Potentiel et énergie électrostatiques

4. Flux électrostatique – Théorème de Gauss

5. Dipôle électrostatique

6. Conducteurs en équilibre

NOTA BENE : Les exercices proposés comportent les niveaux de difficultés :

- * Niveau 1 : facile
- ** Niveau 2 : moyen
- *** Niveau 3 : difficile
- **** Niveau 4 : très difficile

1. Charges électriques

Exercice 1 ** — Interaction entre trois charges ponctuelles

On considère un plan xOy. Deux charges ponctuelles $q_A = q_B = q'$ sont placées sur l'axe des x, respectivement aux points A et B, de coordonnées $(a,0)$ et $(-a,0)$, comme indiqué sur la figure E1.

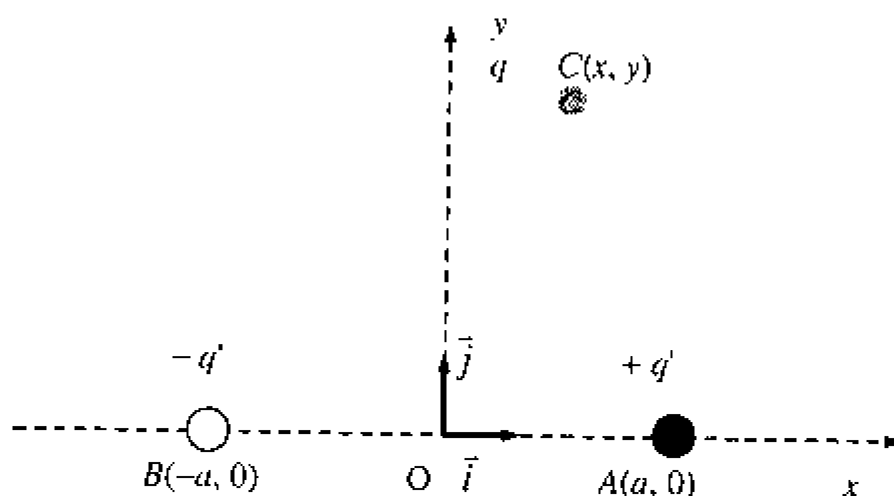


Fig. E1

1. Déterminer la force électrostatique résultante qui s'exerce sur une charge ponctuelle q située en un point quelconque C de coordonnées (x, y), comme indiqué sur la figure E1.
On suppose $q > 0$, $q' > 0$ et $q >> q'$ de façon à négliger l'interaction entre les charges q'.
2. Refaire l'exercice dans le cas où $q_A = q'$ et $q_B = -q'$.

Solution :

1. Dans la figure E1.1, on a représenté le diagramme des forces pour la charge q. Il montre toutes les forces électriques qui agissent sur cette charge.
La charge q' située en A étant positive, elle interagit avec la charge q (également positive) située en C, avec une force électrostatique répulsive $\vec{F}_{AC}$:

$$\vec{F}_{AC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{r_{AC}^2}\vec{u}_{AC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{(AC)^2}\left(-\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right)$$

avec: $\vec{u}_{AC} = -\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$

En outre, $\cos\alpha = \dfrac{HA}{AC} = \dfrac{HA}{\sqrt{(AH)^2+(HC)^2}} = \dfrac{a-x_c}{\sqrt{(x_c-a)^2+y_c^2}}$; $\sin\alpha = \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{y_c}{\sqrt{(x_c-a)^2+y_c^2}}$

Fig. E1.1

D'où: $$\vec{F}_{AC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{(a-x_c)^2+y_c^2}\left(-\frac{a-x_c}{\sqrt{(x_c-a)^2+y_c^2}}\vec{i} + \frac{y_c}{\sqrt{(x_c-a)^2+y_c^2}}\vec{j}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{\left[(x_c-a)^2+y_c^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left((x_c-a)\vec{i} + y_c\,\vec{j}\right)$$

- La charge $+q'$ située en B étant positive, elle interagit avec la charge q (positive) située en C, avec une force électrostatique répulsive $\vec{F}_{BC}$:

$$\vec{F}_{BC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{r_{BC}^2}\vec{u}_{BC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{(BC)^2}\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{(HB)^2+(HC)^2}\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)$$

avec: $\vec{u}_{BC} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$;

$$\cos\theta = \frac{HB}{BC} = \frac{HB}{\sqrt{(HB)^2+(HC)^2}} = \frac{x_c+a}{\sqrt{(x_c+a)^2+y_c^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{HC}{BC} = \frac{HC}{\sqrt{(HB)^2+(HC)^2}} = \frac{y_c}{\sqrt{(x_c+a)^2+y_c^2}}$$

D'où: $$\vec{F}_{BC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{(x_c+a)^2+y_c^2}\left(\frac{x_c+a}{\sqrt{(x_c+a)^2+y_c^2}}\vec{i} + \frac{y_c}{\sqrt{(x_c+a)^2+y_c^2}}\vec{j}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{\left[(x_c+a)^2+y_c^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left((x_c+a)\vec{i} + y_c\,\vec{j}\right)$$

Pour déterminer la force résultante qui s'applique sur la charge q, on applique le principe de superposition. Ce qui revient à faire la somme vectorielle des forces $\vec{F}_{AC}$ et $\vec{F}_{BC}$.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC}$$

On obtient: $$\vec{F} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left((x_c - a)\,\vec{i} + y_c\,\vec{j}\right)}{\left[(x_c - a)^2 + y_c^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\left((x_c + a)\,\vec{i} + y_c\,\vec{j}\right)}{\left[(x_c + a)^2 + y_c^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

2. Dans la figure E1.2, on a représenté le diagramme des forces pour la charge q, dans le cas où $q_A = +q'$ et $q_B = -q'$. Il montre toutes les forces électriques qui agissent sur cette charge.

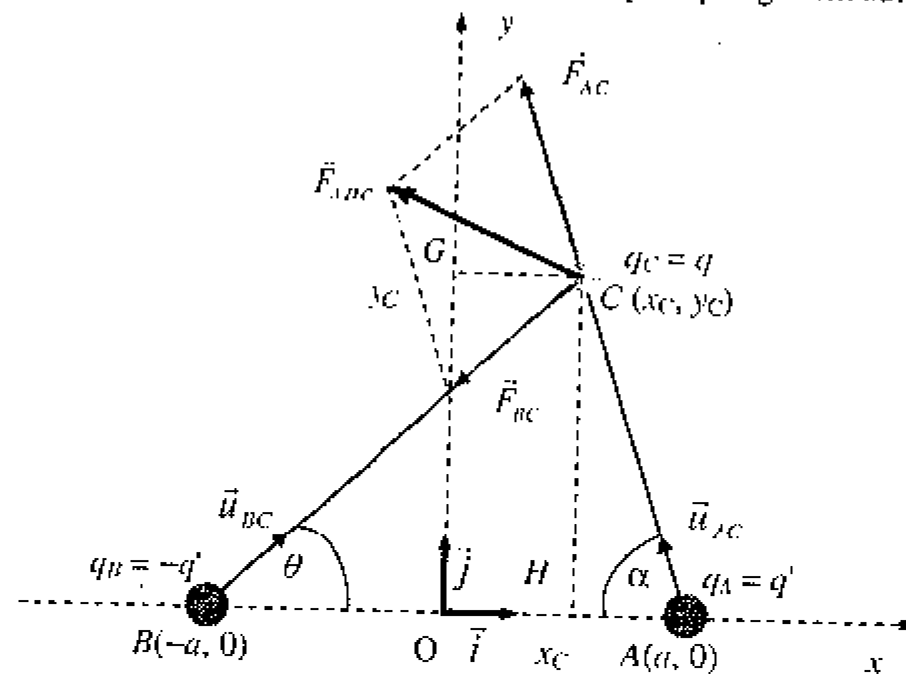


Fig. E1.2

En effectuant un raisonnement analogue au précédent, on trouve:

$$\vec{F}_{AC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{\left[(x_c - a)^2 + y_c^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left((x_c - a)\,\vec{i} + y_c\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{BC} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{\left[(x_c - a)^2 + y_c^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left((x_c + a)\,\vec{i} + y_c\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{F} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left((x_c - a)\,\vec{i} + y_c\,\vec{j}\right)}{\left[(x_c - a)^2 + y_c^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left((x_c + a)\,\vec{i} + y_c\,\vec{j}\right)}{\left[(x_c + a)^2 + y_c^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Exercice 2 ** — Equilibre d'un système de charges triangulaire

On dispose des charges ponctuelles identiques q (en grandeur et en signe) aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a (Fig. E2).

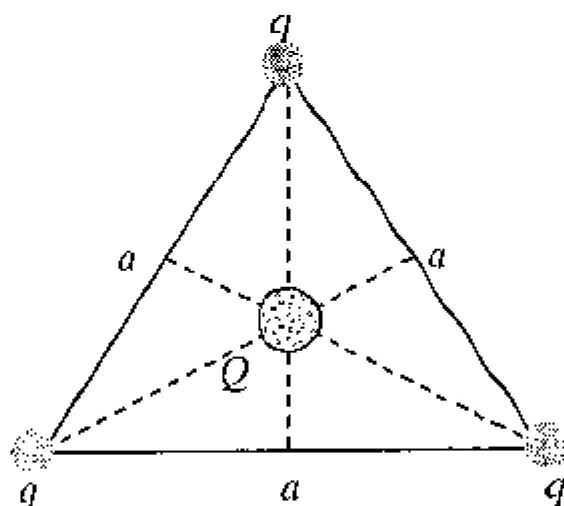


Fig. E2

Quelle charge ponctuelle Q de signe contraire faut-il placer au centre du triangle pour que la résultante de toutes les forces qui agissent sur chacune de ces charges soit égale à zéro ?

Solution

Dans la figure E2.1, on a représenté le diagramme des forces pour la charge q_1. Il montre toutes les forces électriques qui agissent sur cette charge.

Les charges situées aux sommets du triangle rectangle sont toutes positives, les forces $\vec{F}_{21}$ et $\vec{F}_{31}$ sont, par conséquent, répulsives. Pour que la charge Q placée au centre du triangle équilatéral soit en équilibre, il faut que la force $\vec{F}_{14}$ soit attractive, égale et opposée à la résultante $\vec{F}_{321}$. Par conséquent, la charge Q doit être négative.

Exprimons ces forces sous leurs formes vectorielles, en remarquant, d'après la figure E2.1, que:

$$\alpha = \frac{\pi}{6};$$

et: $$r_{21} = r_{31} = a;$$

$$r_{14}\cos\alpha = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad r_{14}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad r_{14}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad r_{14} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

On obtient:

$$\vec{F}_{21} = F_{2}.(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}) = k\frac{q^2}{(r_{31})^2}(\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{31} = F_{31}\,\vec{i} = k\frac{q^2}{(r_{31})^2}\vec{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\vec{i}$$

$$\vec{F}_{14} = F_{14}\left(-\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right) = k\frac{qQ}{(r_{14})^2}\left(-\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qQ}{a^2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

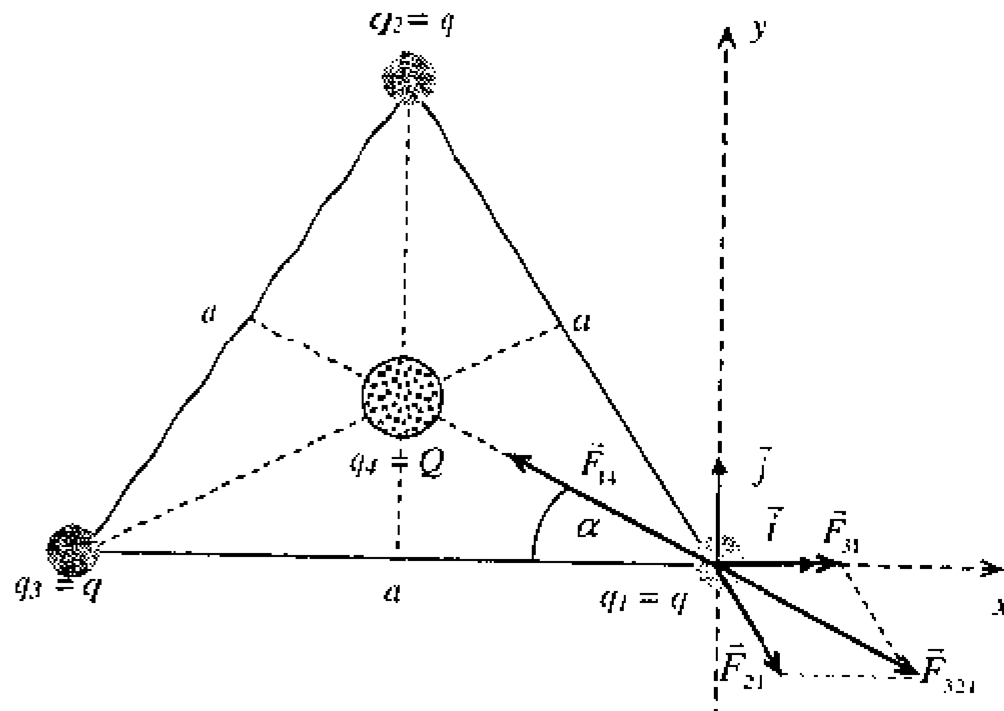


Fig. E2.1

Pour obtenir la valeur de la charge Q (négative), qui satisfait la condition d'équilibre, on applique le principe de superposition. Ce qui revient à faire la somme vectorielle des forces $\vec{F}_{21}$ et $\vec{F}_{31}$.

$$\vec{F}_{321} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3}\,q^2}{a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

A l'équilibre,

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{321} + \vec{F}_{14} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_{321} = -\vec{F}_{14}$$

Alors, on peut écrire:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3}\,q^2}{a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qQ}{a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

En simplifiant par $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3}\,q}{a^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)$, on obtient: $Q = \frac{q}{\sqrt{3}}$

La charge q_4 est de signe opposé à celui des autres charges; elle est négative et vaut:

$$\boxed{-Q = -\frac{q}{\sqrt{3}}}$$

☞ Seules les valeurs absolues des charges électriques, $|q|$ ou notée q dans ce texte, sont utilisées dans le calcul. Leurs signes sont pris en compte dans le tracé des directions des forces dans la figure E2.1.

Exercice 3 *** — Distribution linéique de charges

On considère un segment portant une densité linéique de charges $\lambda = A\,z^2$, où A est une constante (Fig. E3).

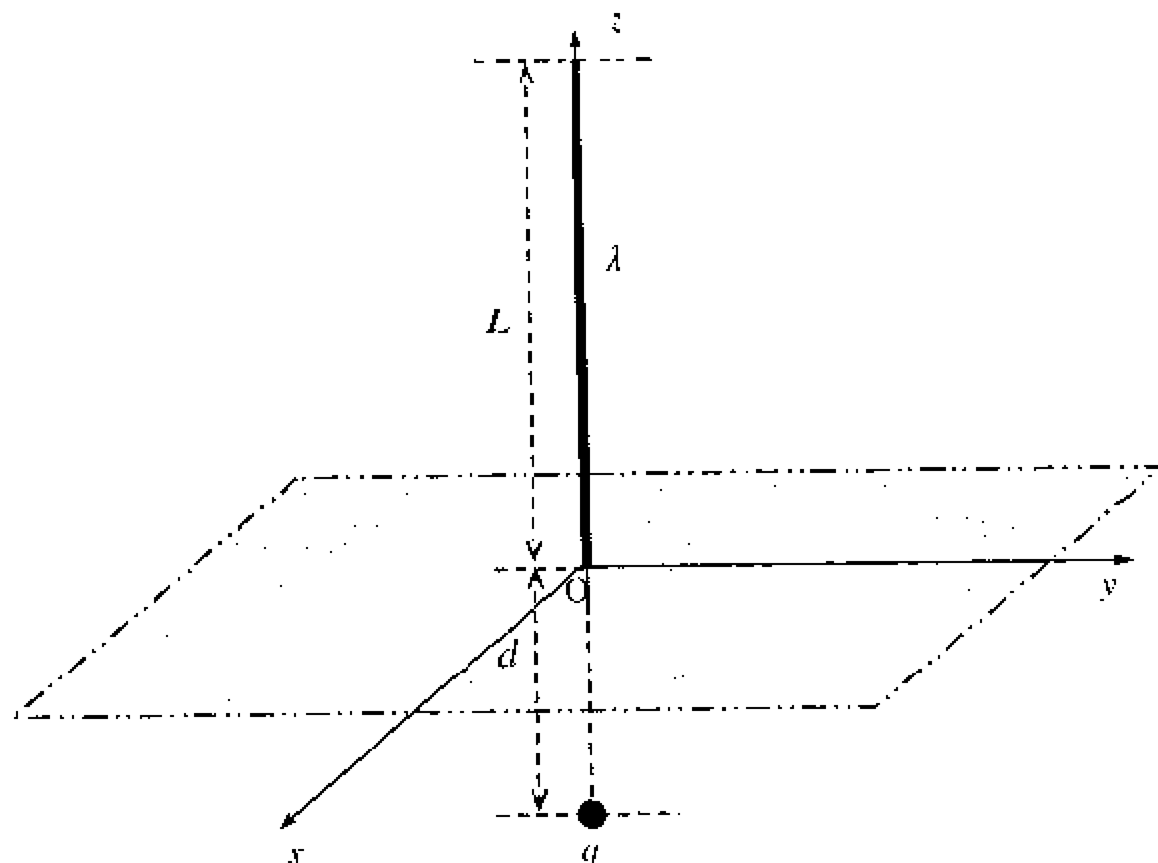


Fig. E3

1. **Donner les dimensions de la constante A.**
2. **Quelle est la charge totale Q portée par le segment?**
3. **Trouver la force électrostatique exercée par cette distribution de charges sur une charge ponctuelle q placée au centre $O(0,0,0)$.**
4. **Trouver la force électrostatique exercée par cette distribution de charges sur la charge ponctuelle q placée cette fois en un point $M(0,0,-a)$ de l'axe Oz.**
5. **Si le point M s'éloigne du point O ($d >> L$), montrer que la force trouvée en (4) se ramène à une force coulombienne qui s'exerce entre deux charges ponctuelles distantes de d.**

Solution :

1. En utilisant l'équation aux dimensions, on obtient:

$$[A]=\frac{[\lambda]}{[z^2]}=\frac{\left[\frac{Charge}{Longueur}\right]}{[Longueur]^2}=\frac{[Charge]}{[Longueur]^3}$$

Dans le Système International, les dimensions de la constante A sont:

$$\boxed{[A]=\frac{Coulomb}{mètre^3}=\frac{C}{m^3}}$$

2. On divise le segment de longueur L et de charge q, en éléments de longueur dl et de charge dq (Fig. E3). Chaque élément dl du segment porte une charge $dq=\lambda\, dl$.

Pour déterminer la charge totale portée par le segment, on applique le principe de superposition qui consiste, dans ce cas, à faire la sommation (intégration de $l = 0$ à $l = L$) de toutes les charges élémentaires réparties sur la longueur L du segment.
Donc, la charge totale portée par le segment s'obtient par intégration de $z = 0$ à $z = L$ de l'expression:

$$Q=\int_0^L \lambda\, dz$$

Comme: $\lambda = A\, z^2$

On obtient: $Q=\int_0^L A\, z^2 dz = A\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^L \Rightarrow \boxed{Q=A\,\frac{L^3}{3}}$

3. La force électrostatique $\overline{dF}$ exercée par la charge élémentaire $dQ=\lambda dz$, située en P, sur la charge ponctuelle q placée en O tel que $\overline{PO}=-z\,\bar{k}$, s'exprime :

$$\overline{dF}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\lambda\, dz}{(PO)^2}\bar{k}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,A\,z^2}{z^2}dz\,\bar{k}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\,A\,dz\,\bar{k}$$

En appliquant le principe de superposition, la force électrostatique résultante exercée sur la charge ponctuelle q placée au point O, s'obtient en intégrant cette expression de $z = d$ à $z = dL$.

$$\bar{F}=-\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^{d+L} dz\,\bar{k}=-\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}[z]_d^{d+L}\,\bar{k}$$

Finalement, on obtient :

$$\bar{F}=-\frac{qA\,L}{4\pi\varepsilon_0}\bar{k}$$

La charge totale portée par le segment étant égale à $Q=A\,\frac{L^3}{3}$, on trouve finalement:

$$\boxed{\bar{F}=-\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^{d+L} dz\,\bar{k}=-\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}[z]_d^{d+L}\,\bar{k}}$$

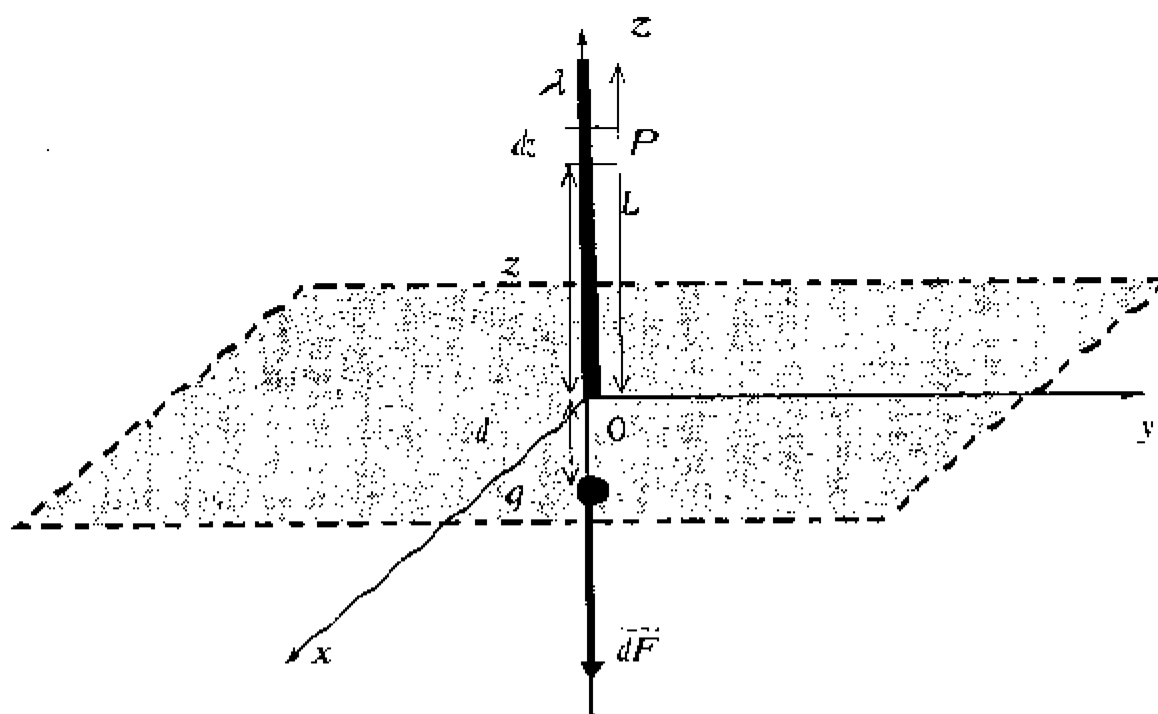


Fig. E3

4. Dans le cas où la densité linéique de charges λ = *constante*, la force électrostatique $\vec{dF}$ exercée par la charge élémentaire $dQ = \lambda dz$, sur la charge ponctuelle q, s'exprime :

$$\vec{dF} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\lambda\, dz}{(PO)^2}\vec{k} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\lambda}{(z+d)^2}dz\ \vec{k}$$

La force résultante exercée par tous les éléments du segment qui sont à des distances différentes de P, est donnée par:

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\lambda\int_0^L \frac{dz}{(z+d)^2}\vec{k} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\lambda\left[-\frac{1}{z+d}\right]_0^L\vec{k}$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\lambda\left[\frac{1}{d}-\frac{1}{L+d}\right]\vec{k} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\lambda L}{d(L+d)}\vec{k}$$

Donc : $\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d(L+d)}\vec{k}}$

5. Si le point M est loin du point O, c'est-à-dire $d >> L$, alors $L+d \approx d$ et la force électrostatique devient:

$$\boxed{\vec{F} \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d^2}\vec{k}}$$

C'est l'expression de la force électrostatique qui s'exerce entre deux charges ponctuelles Q et q, séparées par une distance d.
Dans ces conditions, le segment chargé devient équivalent à une charge ponctuelle de grandeur Q placée à une distance d de la charge q.

Exercice 4 — Distribution surfacique de charges

1. On considère un disque de centre O et de rayon R, chargé avec la densité surfacique de charges $\sigma = C\,r^2$, où C est une constante. Donner les dimensions de la constante C (Fig. E4).

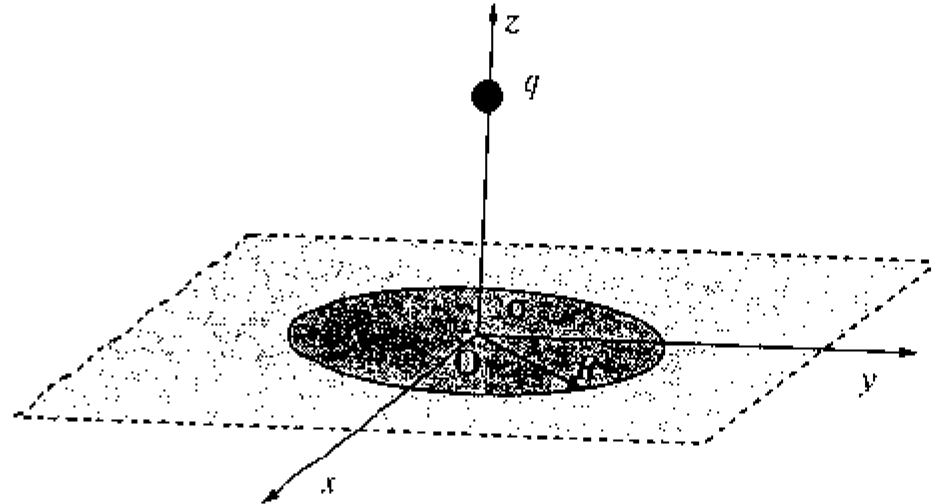


Fig. E4

1. Donner les dimensions de la constante C.

2. Quelle est la charge totale Q portée par le disque ?

3. Trouver la force électrostatique exercée par cette distribution de charges sur une charge ponctuelle q placée en un point M quelconque de l'axe Oz.

Solution :

1. En utilisant l'équation aux dimensions, on obtient:

$$[A] = \frac{[\sigma]}{[r^2]} = \frac{\left[\frac{Charge}{Surface}\right]}{[Longueur]^2} = \frac{\left[\frac{Charge}{Longueur^2}\right]}{[Longueur]^2} = \frac{[Charge]}{[Longueur]^4}$$

Dans le Système International, les dimensions de la constante A sont: $\boxed{[A] = \frac{Coulomb}{mètre^4} = \frac{C}{m^4}}$.

2. On divise le disque de surface S et de charge q, en éléments de surface dS et de charge dq (Fig. E4.1).

Pour déterminer la charge totale portée par le disque, on applique le principe de superposition qui consiste, dans ce cas, à faire la sommation (double intégration de $r = 0$ à $r = R$, et de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$) de toutes les charges élémentaires réparties sur la surface S du disque.

Donc, la charge totale portée par le disque s'obtient par une double intégration de $r = 0$ à $r = R$, et de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$, de l'expression:

$$Q = \iint_S \sigma\, dS = \int_{r=0}^{r=R} \sigma\, r\, dr \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi$$

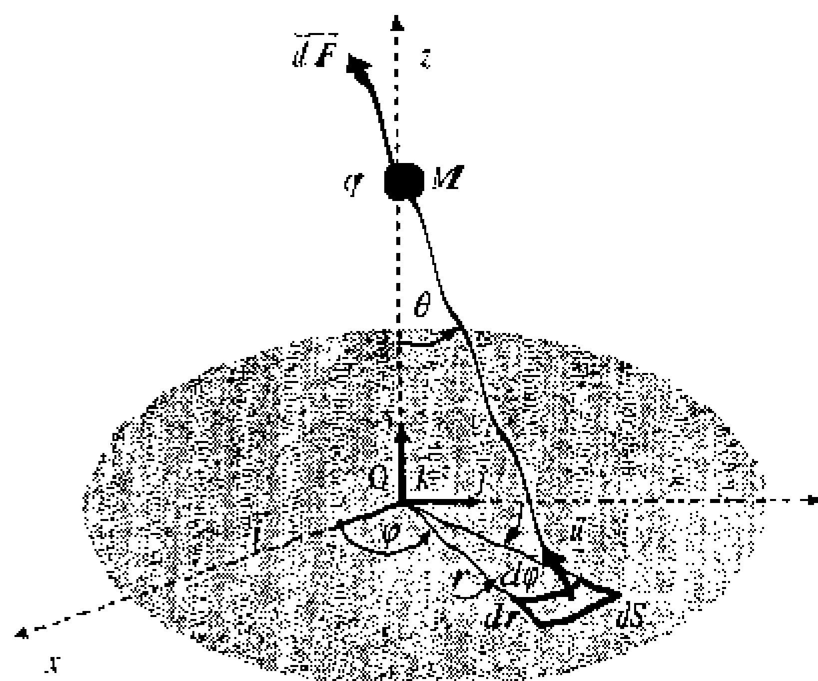


Fig. E4.1

Comme: $\sigma = A\, r^2$

On obtient:

$$Q = A \int_{r=0}^{r=R} r^3\, dr \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi$$

Finalement, on trouve: $\boxed{Q = \pi A \dfrac{R^4}{2}}$

3. On calcule la force électrostatique élémentaire exercée par un élément de surface chargé dS sur la charge ponctuelle q (Fig. E4.1).

Cet élément de surface porte une charge élémentaire:

$$dq = \sigma\, r\, dr\, d\varphi$$

La charge élémentaire dQ exerce une force électrostatique élémentaire $\overrightarrow{dF}$ (Fig. P4.2) donnée par:

$$\overrightarrow{dF} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\, dQ}{r^2+z^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\sigma\, r\, dr\, d\varphi}{r^2+z^2}\vec{u}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\sigma\, r dr\, d\varphi}{r^2+z^2}\left(\cos\theta\ \vec{k} - \sin\theta\, \vec{v}\right)$$

On obtient:

$$\overrightarrow{dF} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\ \sigma\, r\, dr\, d\varphi}{r^2+z^2}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\vec{k} - \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\vec{v}\right)$$

avec $\vec{u} = \cos\theta\vec{k} - \sin\theta\vec{v}$; $\cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$; $\sin\theta = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$.

et $\vec{v} = \cos\varphi\ \vec{i} + \sin\varphi\ \vec{j}$

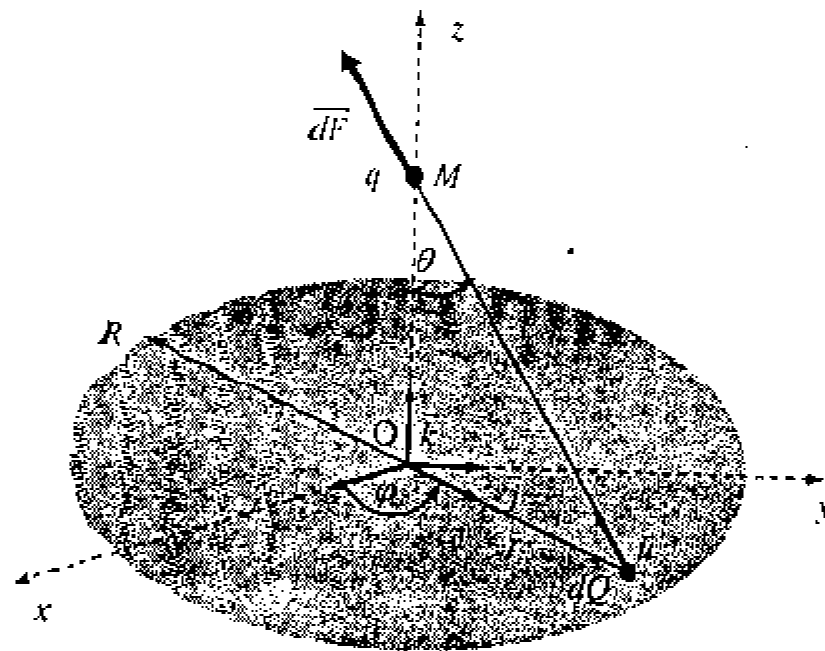


Fig. E4.2

Par conséquent:

$$\vec{dF}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\sigma\,r\,dr\,d\varphi}{r^2+z^2}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\vec{k}-\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\left(\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j}\right)\right)$$

$$\vec{F}=\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^R\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}r^3dr\int_0^{2\pi}d\varphi\,\vec{k}-\int_0^R\frac{r^4}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dr\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\,\vec{i}-\int_0^R\frac{r^4}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dr\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\,\vec{j}\right]$$

$$\vec{F}=\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^R\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}r^3dr\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\vec{k}-\int_0^R\frac{r^4}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dr\left[\sin\varphi\right]_0^{2\pi}\vec{i}-\int_0^R\frac{r^4}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dr\left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi}\vec{j}\right]$$

$$\vec{F}=\frac{qA}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}r^3dr\,2\pi\,\vec{k}=\frac{qA}{\varepsilon_0}z\int_0^R\frac{r^3}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dr\,\vec{k}$$

Les composantes radiales F_x et F_y s'annulent à cause de la symétrie de révolution autour de l'axe des z.

L'expression de la force électrostatique peut alors s'écrire:

$$\vec{F}=\frac{qAz}{2\varepsilon_0}\left[\frac{r^2+2z^2}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^R\vec{k}$$

La force électrostatique exercée par le disque sur la charge ponctuelle q se met finalement sous la forme:

$$\boxed{\vec{F}=\frac{qAz}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R^2+2z^2}{\sqrt{R^2+z^2}}-2z\right]\vec{k}}$$

2. Champ électrostatique

Exercice 5 : Champ électrique créé par deux charges ponctuelles

On considère deux charges ponctuelles q' et $-q'$ placées sur l'axe des x, respectivement à l'origine O(0,0) et au point A de cordonnées (4,0) m (voir la figure E5).

1. Déterminer le champ électrique au point M de coordonnées (0,3) m.

2. Déterminer la force électrostatique exercée sur une charge q placée en M.

On suppose $q > 0$, $q' > 0$ et $q >> q'$ de façon à négliger l'interaction entre les charges q'.

Applications numériques : **$q' = 10^{-8}$ C; $q = 10^{-6}$ C.**

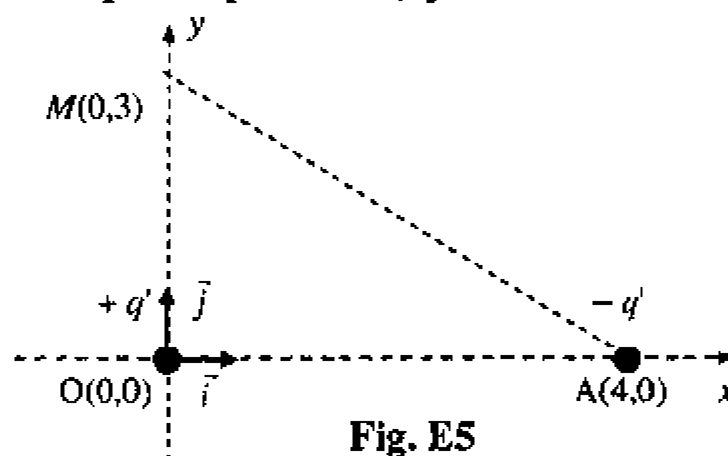


Fig. E5

Réponses :

1. $\vec{E}_M = \left(2{,}88\,\vec{i} + 7{,}84\,\vec{j}\right)\ \left[V \cdot m^{-1}\right]$; on en déduit que le champ électrique $\vec{E}_M$ a :

   a. une grandeur $\left\|\vec{E}_M\right\| = \sqrt{(2{,}88)^2 + (7{,}84)^2} = 8{,}35\ \left[V\, m^{-1}\right]$

   b. et fait un angle $\phi = arctg\left(\dfrac{7{,}84}{2{,}88}\right) = 69{,}83°$ avec la partie positive de l'axe des x.

2. $F_M = q\,\vec{E}_M = \left(2{,}88\,\vec{i} + 7{,}84\,\vec{j}\right)\ [\mu N]$ dans la même direction que $\vec{E}$.

Exercice 6 : Champ électrique créé par un système de charges quadratiques

On dispose des charges ponctuelles $Q_1 = Q_2 = Q$, et $Q_3 = Q_4 = -2Q$, aux sommets d'un carré de côté a.

Déterminer le champ électrique au centre O du carré.

Application numérique : $Q = 1,6.10^{-9}$ C; $a = 4\sqrt{2}$ m.

Solution :

La figure E6 montre les vecteurs champs électrostatiques créés par chacune des quatre charges.

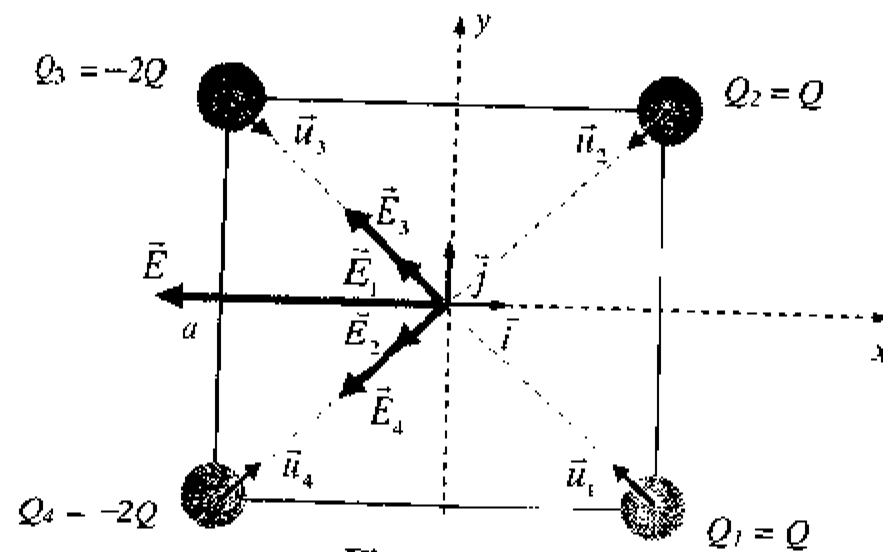


Fig. E6

On applique le principe de superposition pour le champ électrostatique:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{4} \vec{E}_i$$

Les champs électrostatiques s'écrivent respectivement:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{a^2}\vec{u}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{a^2}\left(-\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{a^2}\vec{u}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{a^2}\left(-\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_3 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{a^2}\vec{u}_3 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{a^2}\left(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_4 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{a^2}\vec{u}_4 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{a^2}\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)$$

Le champ électrostatique total au centre O est donc:

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{12Q}{a^2}\cos\theta\,\vec{i}$$

Où $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Finalement, on obtient: $\vec{E}(O) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{3\sqrt{2}Q}{a^2}\vec{i}$

Application numérique : $Q = +1{,}6 \cdot 10^{-9}$ C ; $a = 4\sqrt{2}\,m$.

$$\vec{E}(O) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{3\sqrt{2}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-9}}{32}\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(O) = -3{,}82\,\vec{i}\ \left[V\cdot m^{-1}\right]}$$

■ L'analyse des symétries permet de trouver l'orientation du champ électrique. En effet, l'axe Oy étant un axe d'antisymétrie, le champ électrique total est perpendiculaire à l'axe Oy.

Exercice 7 *** — Champ électrique créé par une tige chargée uniformément

Une tige métallique de longueur l porte une charge Q répartie uniformément avec la densité de charges λ.

1. Déterminer le champ électrostatique en un point O situé sur l'axe de la tige à une distance r d'une des extrémités (Fig. E7).

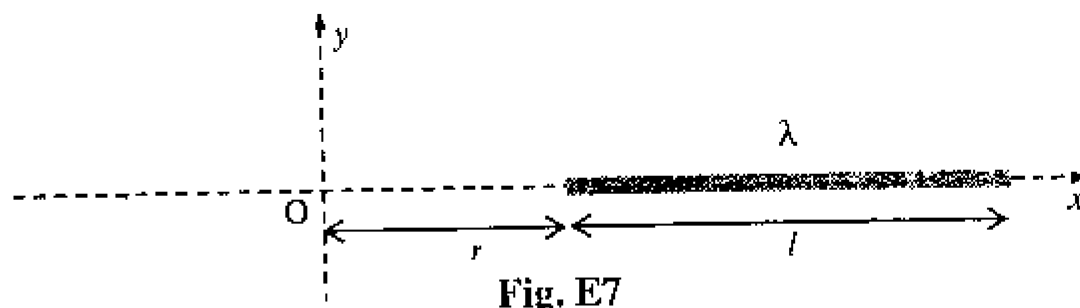


Fig. E7

2. Un électron se déplaçant d'une distance d le long d'une ligne de champ d'un point A à un point B verra sa vitesse changer de v_A à v_B. On considèrera que le point O se trouve loin du fil.

Déterminer la densité linéique de charges du fil.

Application numérique : **l = 10 cm ; r_A = 100 cm ; r_B = 104 cm ; $v_A = 2.10^5$ m.s^{-1}; $v_B = 3.10^6$ m.s^{-1}; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C; $m_p = 9{,}1.10^{-31}$ kg.**

Solution :

1. On divise la tige de longueur l et de charge Q, en éléments de longueur dl et de charge dQ (Fig. E7.1). Chaque élément dl de la tige porte une charge $dQ = \lambda\, dl = \lambda\, dx$.

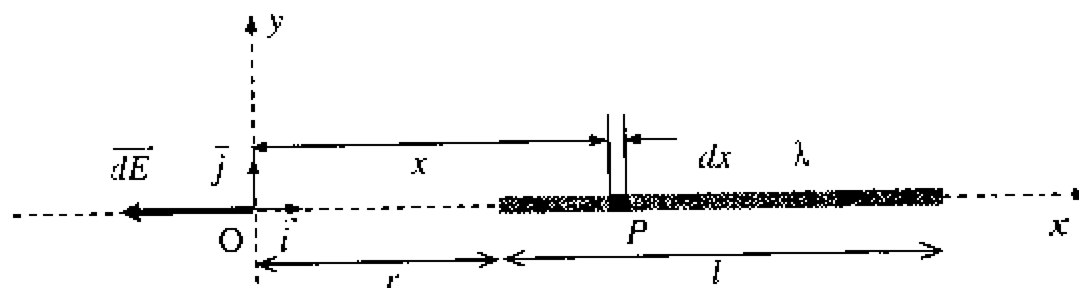


Fig. E7.1

Le champ électrostatique $\overrightarrow{dE}$ créé par la charge élémentaire $dQ = \lambda\, dx$ s'exprime:

$$\overrightarrow{dE} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{(PO)^2}\vec{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{(x)^2}dx\,\vec{i}$$

Pour déterminer le champ électrique total créé par la tige chargée, on applique le principe de superposition qui consiste à faire la sommation (intégration de $x = r$ à $x = r+l$) de tous les champs électriques élémentaires créés par les charges élémentaires dQ réparties sur la longueur l de la tige.

Le champ électrique résultant créé par tous les éléments de la tige qui sont à des distances différentes de O, s'obtient par intégration de $x = r$ à $x = r+l$ de l'expression:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\int_r^{l+r}\frac{dx}{(x)^2}\vec{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\left[-\frac{1}{x}\right]_r^{l+r}\vec{i} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{l+r}\right]\vec{i}$$

Donc: $$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda l}{r(l+r)}\vec{i}}$$

2. Lorsque la tige est loin du point O ($r >> l$), le champ électrique qu'elle crée au point O est donné par:

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda l}{r^2}\vec{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{i}}$$

■ Quand r est très grand devant l, la tige électrisée est équivalente à une charge ponctuelle $Q = \lambda l$.

Si l'électron se trouve en A où règne le champ électrique $\vec{E}$, il va être soumis à la force électrostatique :

$$\vec{F} = -e\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\lambda l}{r^2}\vec{i}$$

Au cours d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$ du proton, la force électrostatique effectue un travail élémentaire dW donné par:

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -e\vec{E}.\overrightarrow{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\lambda l}{r^2}\vec{i}.(dr\,\vec{i}) = +\frac{e\lambda l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

Au cours du déplacement du proton de A vers B, le travail effectué est donné par:

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = +\int_{r_A}^{r_B}\frac{e\lambda l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{e\lambda l}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{e\lambda l}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]$$

On trouve : $W_{A\to B} = \frac{e\lambda l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_B - r_A}{r_A r_B}\right)$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a:

Travail de la force électrostatique = variation de l'énergie cinétique

Donc: $$W_{A\to B} = \frac{e\lambda l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_B - r_A}{r_A r_B}\right) = \frac{1}{2}m_p\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

On en déduit la densité linéique de charges λ :

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 m_e\left(v_B^2 - v_A^2\right)}{el}\left(\frac{r_A r_B}{r_B - r_A}\right)$$

Application numérique: $l = 10$ cm; $r_A = 100$ cm; $r_B = 104$ cm; $v_A = 2.10^5$ m.s^{-1}; $v_B = 3.10^6$ m.s^{-1}; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg.

$$\lambda = \frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\left(\left(3 \cdot 10^6\right)^2 - \left(2 \cdot 10^5\right)^2\right)}{9 \cdot 10^9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}1}\left(\frac{1 \cdot 1{,}04}{1{,}04 - 1}\right)$$

Finalement, on trouve : $\lambda = 2{,}44 \cdot 10^{-6} \quad \left[C.m^{-1}\right] \cong 3 \quad \left[\mu C.m^{-1}\right]$

Exercice 8 ** — Champ électrique créé par un fil uniformément chargé infiniment long

Un fil métallique infiniment long est chargé uniformément avec la densité de charges λ.

1. Déterminer le champ électrostatique en un point A situé sur la médiatrice du fil à une distance r de son milieu O (Fig. E8).

2. Une charge électrique positive q se trouve au point A. Sous l'action du champ électrique créé par le fil métallique chargé, elle se déplace d'une distance $d = AB$ (Fig. E8); un travail W s'effectue au cours de ce déplacement.

Déterminer la densité linéique de charges du fil.

Application numérique : **$q = 3.10^{-9}$ C; $OA = r_A = 2$ cm; $OB = r_B = 6$ cm ; $W = 10^{-5}$ J.**

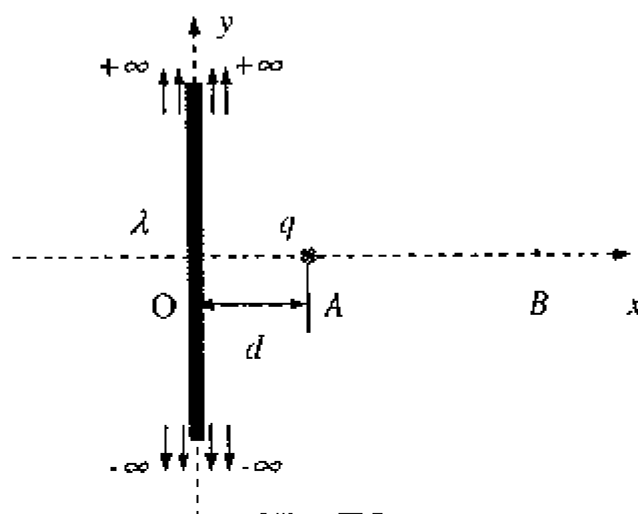


Fig. E8

Solution :

1. On se propose de trouver le champ électrostatique créé en un point M par un filament rectiligne infiniment long, portant une charge λ par unité de longueur (Fig. E8.1).

Pour cela, on divise le filament en petits segments de longueur dz portant chacun une charge $dq = \lambda dz$.

On exprime le champ électrostatique $\overrightarrow{dE_1}$ créé par la charge élémentaire $dq_1 = \lambda dz$, située en P_1, en un point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$,

$$\overrightarrow{dE_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dz}{r^2+z^2}\vec{u}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dz}{r^2+z^2}\left(\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{k}\right)$$

Le champ électrostatique $\overrightarrow{dE_2}$ créé en M par la charge élémentaire $dq_2 = \lambda dz$, située en P_2 (symétrique de P_1 par rapport à O), s'obtient de la même façon:

$$\overrightarrow{dE_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dz}{r^2+z^2}\vec{u}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dz}{r^2+z^2}\left(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{k}\right)$$

Le champ électrostatique $\overrightarrow{dE}$ créé en M par la paire de charges élémentaires (dq_1, dq_2) a pour expression:

$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE_1} + \overrightarrow{dE_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda dz}{r^2+z^2}(\cos\theta\,\vec{u}_r) = dE_r\,\vec{u}_r$$

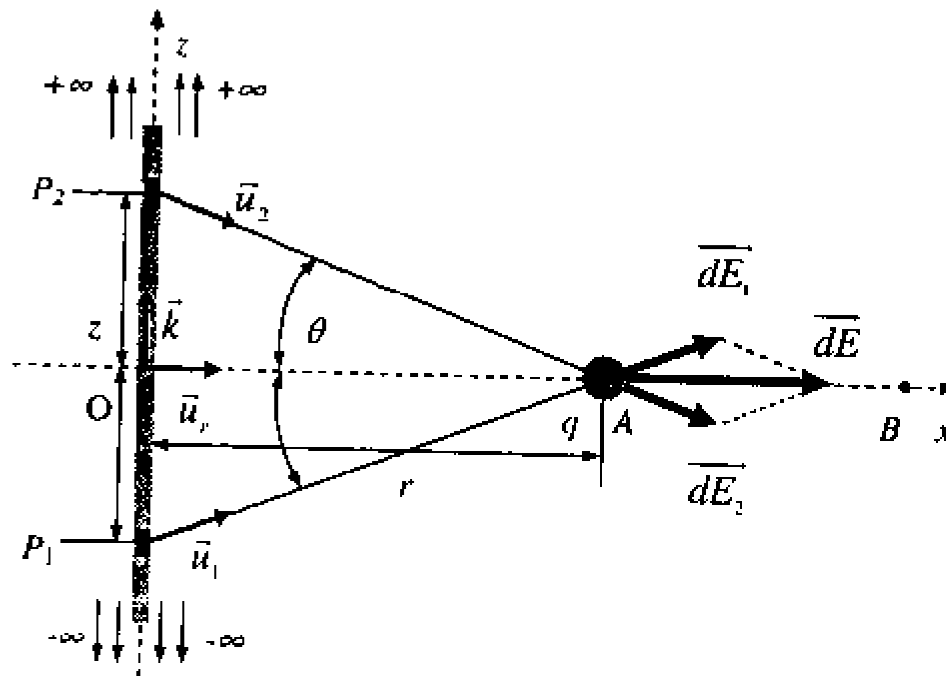


Fig. E8.1

avec: $$dE_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dz}{r^2+z^2}\cos\theta$$

En appliquant le principe de superposition, le champ électrostatique résultant au point M, s'obtient en intégrant cette expression de $\theta = 0$ à $\theta = \pi/2$.

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{r^2+z^2}\cos\theta$$

Comme: $$\cos\theta = \sqrt{\frac{r^2}{r^2+z^2}}$$

alors: $r^2 + z^2 = \frac{r^2}{\cos^2\theta}$

Par ailleurs:

$$tg\,\theta = \frac{z}{r}, \quad et \quad dz = \frac{r\,d\theta}{\cos^2\theta}$$

En substituant $r^2 + z^2$ et dz par leurs expressions respectives dans celle de E_r, on obtient:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\; d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

D'où: $$\boxed{\vec{E} = E_r\,\vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{u}_r}$$

2. La charge électrique q placée en A où règne le champ électrique $\vec{E}$, va être soumise à la force électrostatique:

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{u}_r$$

Au cours d'un déplacement élémentaire $\overline{dr}$ de la charge électrique q, la force électrostatique effectue un travail élémentaire dW donné par:

$$dW = \vec{F}.\overline{dr} = q\vec{E}.\overline{dr} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{u}_r.\overline{dr}\,u_r = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

Au cours du déplacement de la charge q de A vers B, le travail effectué est donné par:

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B}\frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln r\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r_A}$$

On en déduit la densité linéique de charges λ:

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 W}{q\ln\frac{r_B}{r_A}}}$$

Application numérique : $q = 3.10^{-9}$ C; $OA = r_A = 2$ cm; $OB = r_B = 6$ cm; $W = 10^{-5}$ J.

$$\lambda = \frac{2}{9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-9}}\cdot\frac{1}{\ln 3}\cdot 10^{-5}$$

$$\boxed{\lambda = 6,74\cdot 10^{-7}\;\left[C\cdot m^{-1}\right]}$$

Exercice 9 *** — Champ électrique créé par des distributions surfaciques de charges non uniformes

A. On électrise par frottement un disque circulaire en ébonite qui tourne à une vitesse constante dans un plan horizontal. De cette façon, la densité surfacique de charges devient proportionnelle à la distance r du centre du disque ($\sigma = A\,r$, où A est une constante négative).

1. Exprimer la charge totale Q de la couronne en fonction de A, R_1 et R_2. Donner les dimensions de la constante A.
2. Utiliser les symétries pour déterminer l'orientation du champ électrostatique au centre O.
3. Exprimer le champ électrostatique $\vec{E}$ en un point M situé sur l'axe de la couronne à une distance z de O.

B. Une couronne découpée dans un carreau de verre (rayons intérieur R_1 et extérieur R_2) porte une charge Q distribuée avec la densité surfacique de charges $\sigma = \sigma_0 \sin^2 \varphi$ (σ_0 est une constante positive) (Fig. E9).

1. Exprimer la charge totale Q de la couronne en fonction de σ_0, R_1 et R_2.
2. Utiliser les symétries pour déterminer l'orientation du champ électrostatique au centre O.
3. Exprimer le champ électrostatique $\vec{E}$ en un point M situé sur l'axe de la couronne à une distance z de O.

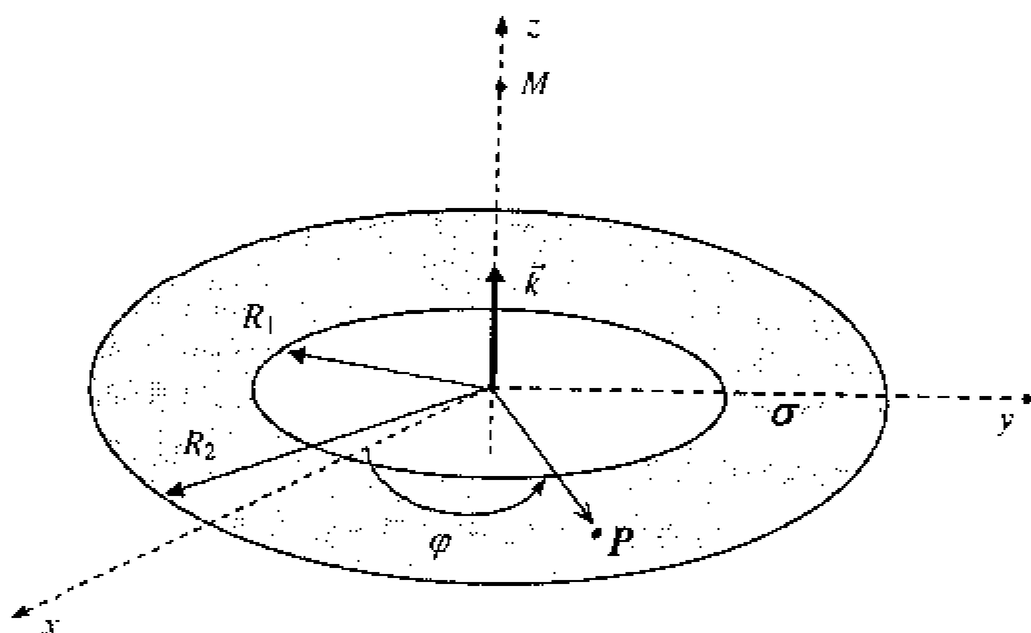


Fig. E9

Solution :

A.1.On divise le disque de rayon R, en anneaux élémentaires de rayon intérieur r et d'épaisseur dr. Chaque anneau porte une charge élémentaire :

$$dq = \sigma\, dS = \sigma\, 2\pi r\, dr$$

Pour déterminer la charge totale Q portée par le disque, on fait la sommation (intégration de $r = 0$ à $r = R$) de toutes les charges élémentaires réparties sur la surface du disque.

La charge totale Q portée par le disque en ébonite s'obtient par intégration de $r = 0$ à $r = R$ de l'expression suivante, avec la valeur appropriée de σ.

$$Q = \iint_S \sigma \, dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma \, r \, dr \, d\varphi$$

avec: $\sigma = A\, r$

Donc: $Q = \iint_S \sigma \, dS = \int_0^R A r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi$

Par conséquent :

$$Q = \iint_S \sigma \, dS = \int_0^R A r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \Rightarrow \; = A\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \left[\varphi\right]_0^{2\pi}$$

Finalement, on obtient: $\boxed{Q = \frac{2}{3} A \pi R^3}$

En utilisant l'équation aux dimensions, on obtient: $[A] = \dfrac{[Q]}{\left[\frac{3}{2}\pi R^3\right]} = \dfrac{[Charge]}{[Longueur]^3}$

Dans le Système International, les dimensions de la constante A sont:

$$\boxed{[A] = \frac{Coulomb}{mètre^3} = \frac{C}{m^3}}$$

A.2. La distribution est invariante dans toute rotation θ autour de l'axe z (Fig. E9.1): c'est une symétrie axiale.

- En tout point de l'axe Oz, le champ électrostatique $\vec{E}$ est porté par l'axe; il ne dépend que de z.

Les plans (xOz) et (yOz) sont des plans de symétrie; de même, tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie; le plan (xOy) est également un plan de symétrie. Le point O appartient à des plans de symétries orthogonaux: c'est un centre de symétrie.

- Le champ électrostatique $\vec{E}$ est nul au point O.

A.3. On calcule le champ électrostatique élémentaire créé par un élément de surface uniformément chargé dS.

Cet élément de surface porte une charge élémentaire:

$$dQ = \sigma \, r \, dr \, d\varphi$$

La charge élémentaire dQ crée un champ électrostatique élémentaire $\overrightarrow{dE}$ (Fig. E9.2):

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ}{r^2 + z^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{A\, r^2 \, dr \, d\varphi}{r^2 + z^2} \vec{u}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{A\, r^2 \, dr \, d\varphi}{r^2 + z^2} \left(\cos\theta \, \vec{k} - \sin\theta \, \vec{v}\right)$$

Finalement, on obtient:

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{A\, r^2 \, dr \, d\varphi}{r^2 + z^2} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \vec{k} - \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \vec{v}\right)$$

avec $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{k} - \sin\theta\,\vec{v}$; $\cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$; $\sin\theta = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$.

et $\vec{v} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$

Par conséquent:

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{A r^2\,dr\,d\varphi}{r^2+z^2}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\vec{k} - \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\left(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\right)\right)$$

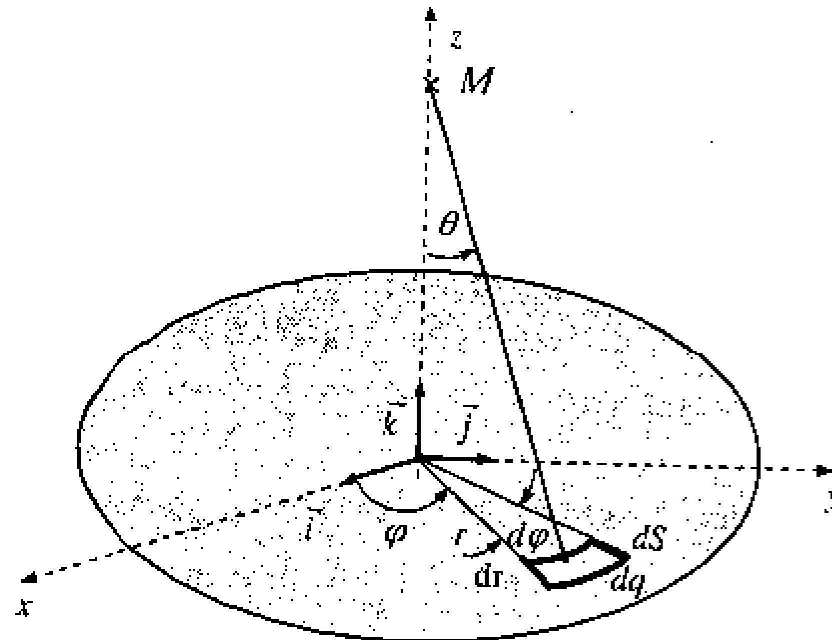


Fig. E9.1

Les composantes radiales E_x et E_y s'annulent à cause de la symétrie de révolution autour de l'axe des z. Le champ électrostatique résultant $\vec{E}$ a pour direction Oz.
Donc, la composante utile du champ électrostatique résultant est donnée par :

$$\vec{E} = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{R_1}^{R_2}\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}r^2\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\right]\vec{k}$$

Posons $u = r^2 + z^2$, alors $du = 2r\,dr$. L'expression du champ électrostatique peut alors s'écrire:

$$\vec{E} = \frac{A\,z}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{R_1}^{R_2}\frac{r^2 dr}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}d\varphi\right]\vec{k}$$

$$= \frac{A\,z}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\ln\left(r+\sqrt{r^2+z^2}\right) - \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_{0}^{R}\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\right\}\vec{k}$$

$$\vec{E} = \frac{A\,z}{2\varepsilon_0}\left[\ln\frac{\left(R+\sqrt{R^2+z^2}\right)}{z} - \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{k}$$

Sachant que : $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\frac{2}{3}A\pi R^3}{\pi R^2} = \frac{2}{3}AR$, la constante A s'exprime: $A = \frac{3}{2}\frac{Q}{\pi R^3}$

Le champ électrostatique créé par le disque se met sous la forme:

$$\vec{E} = \frac{3Qz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\ln\frac{\left(R+\sqrt{R^2+z^2}\right)}{z} - \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{k}$$

B. Le champ électrostatique créé par une couronne découpée dans un carreau de verre (voir Fig. E9.2) portant une charge Q distribuée avec la densité surfacique de charges $\sigma = \sigma_0 \sin^2\varphi$ (σ_0 est une constante positive) se calcule de la même manière que pour le disque.

Les réponses sont les suivantes:

B.1. $Q = \frac{1}{2}\sigma_0\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$

B.2. voir A.2.

B.3. $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R_2^2}}\right]\vec{k} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R_2^2}}\right]\vec{k}$

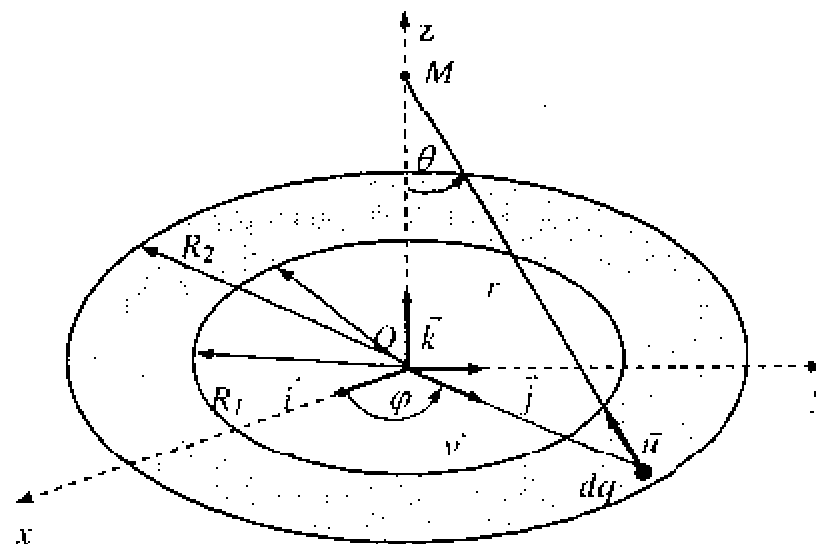


Fig. E9.2

3. Potentiel et énergie électrostatiques

Exercice 10 * — Potentiel électrique créé par une distribution cubique de charges ponctuelles

On considère huit charges ponctuelles Q placées aux sommets d'un cube d'arête a (voir la figure E10).

1. Déterminer le potentiel électrostatique au centre O du cube.

On prendra le potentiel nul à l'infini ($V(\infty) = 0$).

2. Déterminer le potentiel électrostatique créé à chaque sommet du cube par les sept autres charges électriques.

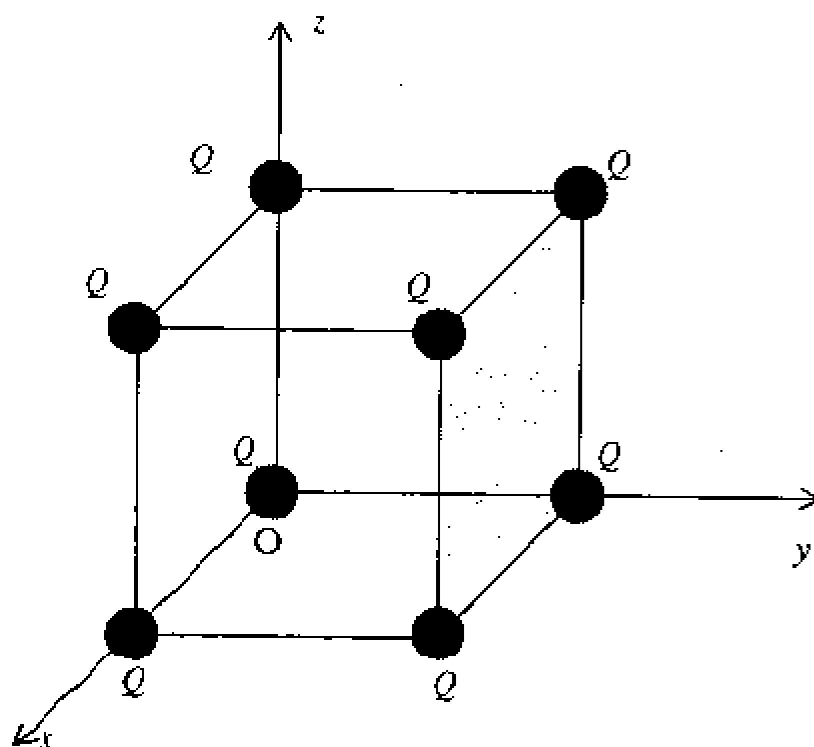


Fig. E10

Solution :

1. Choisissons l'origine des potentiels à l'infini. On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel créé au centre O par les charges ponctuelles placées aux huit sommets du cube (Fig. E10.1).

$$V_t = \sum_{i=1}^{i=8} V_i = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 = 8V$$

avec $V_1 = V_2 = \cdots = V_8 = V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{a\sqrt{3}}$, le potentiel créé par chacune des charges au point O.

Finalement, on trouve:

$$\boxed{V_t = 8\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{16Q}{a\sqrt{3}}}$$

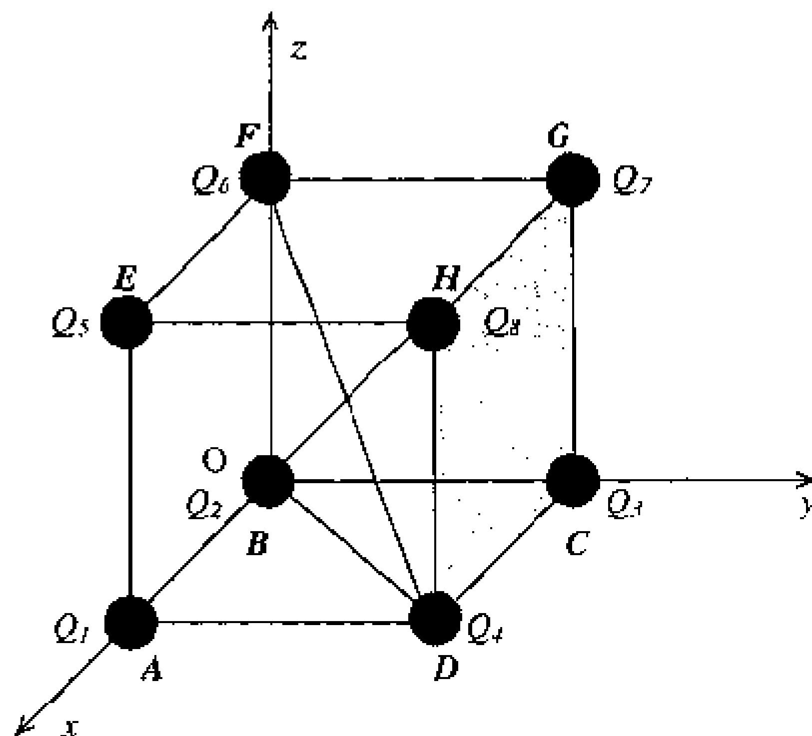


Fig. E10.1

On montre par exemple que la diagonale FD vaut :

$$FD = \sqrt{OD^2 + OF^2}$$

et $$OD = \sqrt{OA^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Par conséquent,

$$FD = \sqrt{OD^2 + OF^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

2. On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel créé au sommet A par les charges ponctuelles placées aux sept autres sommets du cube (Fig. E10.1).

$$V' = \sum_{i=2}^{i=8} V'_i = V'_2 + V'_3 + V'_4 + V'_5 + V'_6 + V'_7 + V'_8$$

avec $V'_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{BA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$; $V'_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{CA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a\sqrt{2}}$;

$V'_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{DA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$; $V'_5 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{EA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$;

$V'_6 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{FA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a\sqrt{2}}$; $V'_7 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{GA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a\sqrt{3}}$;

$V'_8 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{HA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a\sqrt{2}}$.

Par conséquent, on obtient:

$$V' = 3\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a\sqrt{2}}\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a\sqrt{3}}$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}\left[3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right]}$$

Exercice 11 ** — Calcul du champ à partir du potentiel

On considère trois charges ponctuelles disposées comme le montre la figure E11.

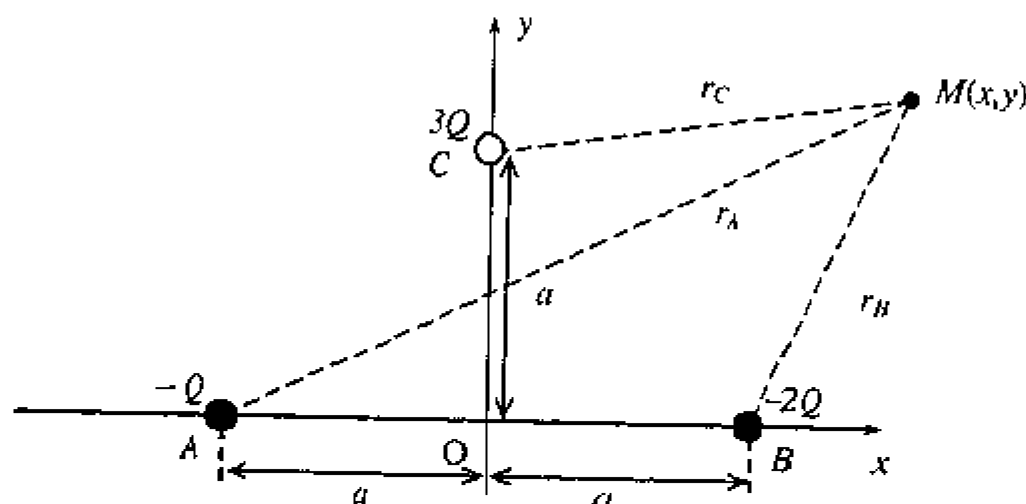


Fig. E11

1. **Déterminer le potentiel électrostatique créé en un point $M(x,y)$ situé dans le plan des charges.**
2. **En déduire le champ électrostatique créé par les trois charges au point $M(x,y)$.**

Solution :

1. Choisissons l'origine des potentiels à l'infini. Les potentiels créés par les charges Q_A, Q_B et Q_C au point M sont respectivement :

$$V_A(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{r_A}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{AM}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}};$$

$$V_B(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B}{r_B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B}{BM}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2Q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}};$$

$$V_C(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_C}{r_C}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_C}{CM}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{\sqrt{x^2+(y-b)^2}};$$

où, $r_A=AM=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$; $r_B=BM=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$; $r_C=CM=\sqrt{x^2+(y-b)^2}$.

On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel électrostatique créé par les trois charges ponctuelles au point M.

$$V(M)=\sum_i V_i(M)=\sum_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}=V_A(M)+V_B(M)+V_C(M)$$

On obtient:

$$\boxed{V(M)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}-\frac{2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+(y-b)^2}}\right]}$$

2. Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dérive d'un potentiel, tel que:

$$\vec{E}(M)=-\vec{\nabla}V(M)=-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}$$

avec,

$$\boxed{E_x(M)=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(x+a)}{\left[(x+a)^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{2(x-a)}{\left[(x-a)^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{3x}{\left[x^2+(y-b)\right]^2}\right]}$$

$$\boxed{E_y(M)=-\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y}{\left[(x+a)^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{2y}{\left[(x-a)^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{3(y-b)}{\left[x^2+(y-b)\right]^2}\right]}$$

☞ Bien que ce calcul semble assez long, le lecteur vérifiera que le calcul direct du champ électrostatique est plus difficile.

Exercice 12 ** — Potentiel électrique créé par deux arcs de cercle concentriques chargés

Deux tiges minces en forme d'arcs de cercle de rayons R_1 et R_2 sont respectivement chargées uniformément avec les densités linéiques de charges $+\lambda$ et $-\lambda$. Ces arcs forment un angle total $2\theta_0$ symétrique par rapport à l'axe des x (Fig. E12).

1. Déterminer le potentiel électrostatique V à l'origine O.
2. Etudier les cas suivants :

   a. $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (demi-cercle)

   b. $\theta_0 = \pi$ (cercle entier)

3. Quel serait le potentiel électrostatique V à l'origine O si les distributions linéiques de charges sont:

   a. $\pm\lambda = \pm\lambda_0 \cos\theta$

   b. $\pm\lambda = \pm\lambda_0 \sin\theta$

4. Déterminer le potentiel électrostatique V en un point M situé sur l'axe Oz, distant de z de l'origine O, dans le cas où $\theta_0 = \pi$ (cercle entier) et $\lambda = \lambda_0$ (λ_0 étant une constante positive).

Examiner le cas où le point M est très éloigné de O.

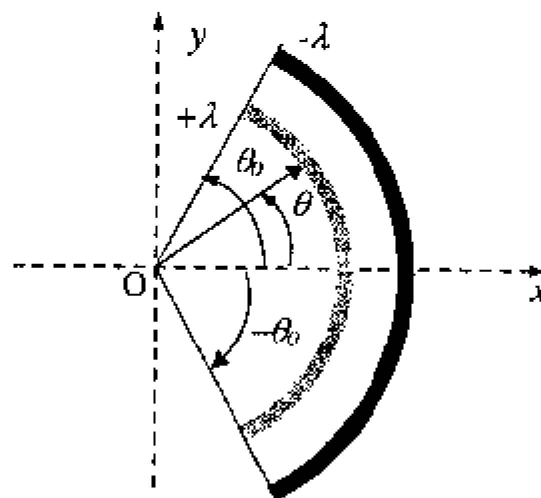


Fig. E12

Solution :

1. Le calcul du potentiel électrostatique créé par cette distribution de charges au centre O s'obtient aisément en faisant la superposition des potentiels créés par:

- un arc de cercle de centre O et de rayon R_1, chargé avec la densité linéique $+\lambda$;
- un arc de cercle de centre O et de rayon R_2, chargé avec la densité linéique $-\lambda$.

Considérons l'arc de cercle de centre O et de rayon R_1, chargé avec la densité linéique $+\lambda$. Cet exercice traite le cas d'une distribution linéique de charges. On divise l'arc de cercle en éléments de charges de longueur dl (Fig. E 12. 1).

Chaque élément de charges peut être considéré comme une charge ponctuelle de grandeur $\lambda\, dl$ qui crée en O un potentiel dV donné par:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_1}{R_1}$$

avec : $dq_1 = \lambda\, dl = \lambda\, R_1\, d\theta$

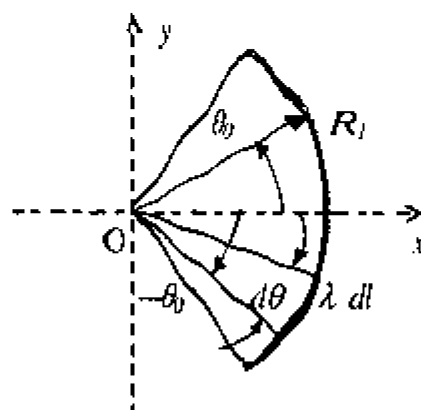


Fig. E12.1

En appliquant le principe de superposition, et en prenant l'origine des potentiels à l'infini, le potentiel électrostatique résultant obtenu par intégration, s'exprime:

$$V = \int_{fil} dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} d\theta$$

Soit : $V = \dfrac{\lambda\,\theta_0}{2\pi\,\varepsilon_0}$

De la même façon, on montre que l'arc de cercle de centre O et de rayon R_2, chargé avec la densité linéique $-\lambda$, crée au centre O un potentiel :

$$V' = -\frac{\lambda\,\theta_0}{2\pi\,\varepsilon_0}$$

On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel électrostatique total V_t au point O:

$$V_t = \sum_i V_i = V + V'$$

$$\boxed{V_t = \frac{\lambda\,\theta_0}{2\pi\,\varepsilon_0} - \frac{\lambda\,\theta_0}{2\pi\,\varepsilon_0} = 0}$$

2. Examinons les cas suivants :

a. $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (demi-cercle)

On trouve : $V = \dfrac{\lambda}{4\varepsilon_0}$; $V' = -\dfrac{\lambda}{4\varepsilon_0}$ et $V_t = 0$.

b. $\theta_0 = \pi$ (cercle entier)

On trouve : $V = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon_0}$; $\quad V' = -\dfrac{\lambda}{2\varepsilon_0}$ et $V_t = 0$.

3. Examinons maintenant les cas suivants :

a. $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$

En appliquant le principe de superposition, et en prenant l'origine des potentiels à l'infini, le potentiel électrostatique résultant obtenu par intégration, s'exprime:

$$V = \int_{tige\,1} dV = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos\theta \, d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sin\theta\right]_{-\theta_0}^{+\theta_0}$$

Le potentiel créé en O par la tige 1 est donc:

$$V = \frac{\lambda_0 \sin\theta_0}{2\pi\varepsilon_0}$$

De la même façon, on montre que l'arc de cercle de centre O et de rayon R_2, chargé avec la densité linéique $-\lambda_0 \cos\theta$, crée au centre O un potentiel :

$$V' = -\frac{\lambda_0 \sin\theta_0}{2\pi\varepsilon_0}$$

On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel électrostatique total V_t au point O:

$$V_t = \sum_i V_i = V + V'$$

$$\boxed{V_t = \frac{\lambda_0 \sin\theta_0}{2\pi\varepsilon_0} - \frac{\lambda_0 \sin\theta_0}{2\pi\varepsilon_0} = 0}$$

b. $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$

En appliquant le principe de superposition, et en prenant l'origine des potentiels à l'infini, le potentiel électrostatique résultant obtenu par intégration, s'exprime:

$$V = \int_{tige\,2} dV = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \sin\theta \, d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\cos\theta\right]_{-\theta_0}^{\theta_0}$$

Le potentiel créé en O par la tige 1 est donc:

$$V = 0$$

De la même façon, on montre que l'arc de cercle de centre O et de rayon R_2, chargé avec la densité linéique $-\lambda_0 \sin\theta$, crée au centre O un potentiel :

$$V' = 0$$

On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel électrostatique total V_t au point O:

$$V_t = \sum_i V_i = V + V' \Rightarrow \boxed{V_t = 0}$$

4. Considérons deux tiges minces en forme de cercles de rayons R_1 et R_2 respectivement chargées uniformément avec les densités linéiques de charges $+\lambda$ et $-\lambda$.
Commençons d'abord par déterminer le potentiel créé par le cercle de centre R_1 en un point M de l'axe Oz. De la même façon que précédemment, on divise le cercle en éléments de charges de longueur dl (Fig. E12.2).

Chaque élément de charges peut être considéré comme une charge ponctuelle de grandeur $\lambda\, dl$ qui crée en O un potentiel dV donné par :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R_1} \qquad \text{avec} \qquad dq = \lambda\ dl = \lambda\ R_1\, d\theta$$

En appliquant le principe de superposition, et en prenant l'origine des potentiels à l'infini, le potentiel électrostatique résultant obtenu par intégration, s'exprime:

$$V = \int_{cercle} dV = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

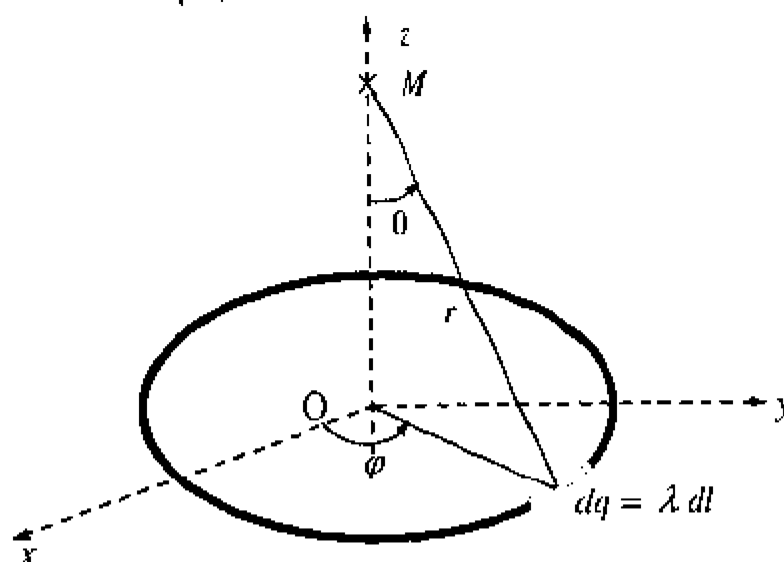


Fig. E12.2

Le potentiel créé en O par la tige 1 est donc:

$$V = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+z^2}}$$

De la même façon, on montre que le cercle de centre O et de rayon R_2, chargé avec la densité linéique $-\lambda_0$, crée au point M un potentiel :

$$V' = -\frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+z^2}}$$

On applique le principe de superposition pour déterminer le potentiel électrostatique total V_t au point O:

$$V_t = \sum_i V_i = V + V' \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_t = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right]}$$

Si le point M est très éloigné du centre O, $z >> R_1$ et $z >> R_2$, l'expression du potentiel devient :

$$\boxed{V_t = \pm\frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{R_1-R_2}{z} \qquad \begin{cases} + & si \quad z>0 \\ - & si \quad z<0 \end{cases}}$$

Exercice 13 *** — Potentiel au centre d'une couche carrée chargée uniformément

Une couche carrée de centre O et de côté a porte une charge Q positive répartie uniformément avec la densité surfacique de charges σ (Fig. E13).

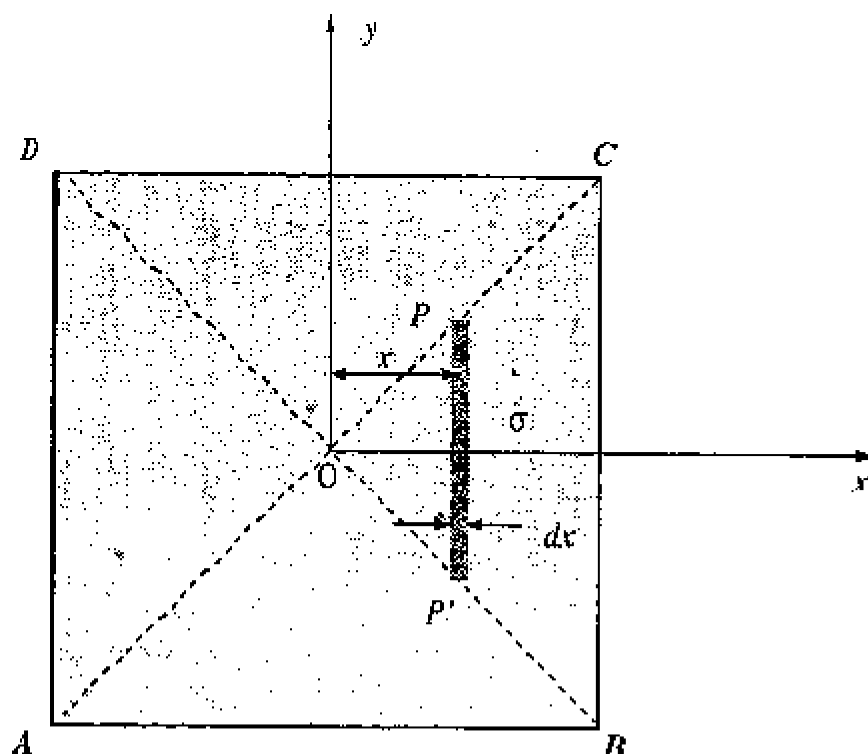


Fig. E13

1. Déterminer le potentiel créé par un segment de longueur $2L$, portant une charge Q uniformément répartie avec la densité linéique de charges λ, en un point M de la médiatrice, à une distance x du milieu de ce segment.

2. Déterminer la contribution au potentiel en O due à la bande étroite PP' de largeur dx.

3. Déterminer la contribution au potentiel en O due au quart du carré.

4. Déterminer le potentiel en C créé par la couche carrée chargée uniformément.
On prendra l'origine des potentiels à l'infini.
On donne :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = ln\,\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a} + Cte$$

Solution :

1. Calculons le potentiel électrostatique créé au point M par le segment chargé (Fig. E13.1). Pour cela, on divise le segment de longueur $2L$ en éléments de longueur dL et de charge $dq = \lambda\, dl$ (Fig. E13.1).

La charge élémentaire dq crée au point M un potentiel électrostatique élémentaire $dV(M)$, tel que:

$$dV(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

La distance r de la charge élémentaire dq au point M est $r=\sqrt{x^2+l^2}$. L'expression du potentiel élémentaire $dV(M)$ devient:

$$dV(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{\sqrt{x^2+l^2}}$$

En appliquant le principe de superposition, et en prenant l'origine des potentiels à l'infini, le potentiel électrostatique résultant obtenu par intégration, s'écrit:

$$V(M)=\int_{fil} dV(M)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\int_{l=0}^{l=+L}\frac{dl}{\sqrt{x^2+l^2}}$$

Finalement, on obtient l'expression de V sur Ox :

$$\boxed{V(M)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{\sqrt{x^2+L^2}+L}{x}}$$

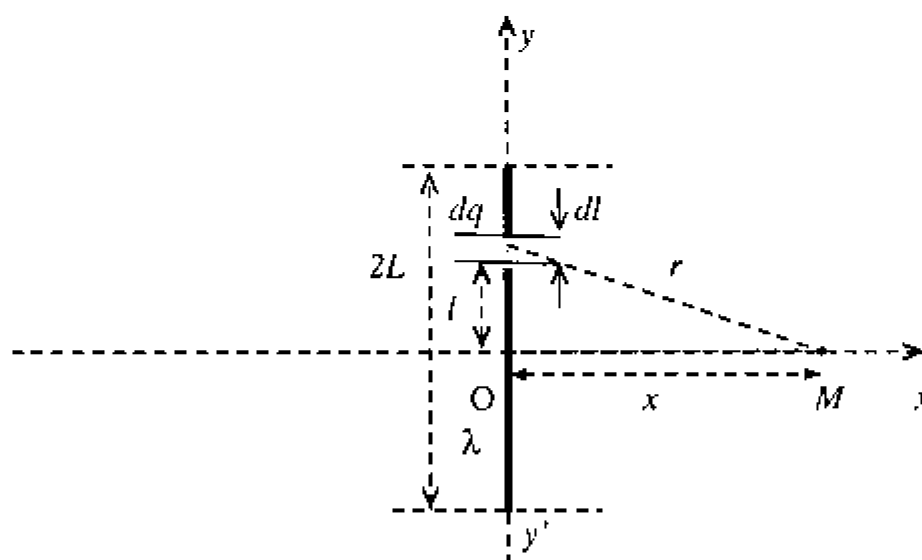


Fig. E13.1

2. La bande étroite PP' peut être considérée comme un segment uniformément chargé avec la densité linéique λ (Fig. E13.2). Ce segment porte une charge élémentaire:

$$dq=\lambda\cdot PP'=\sigma\cdot PP'\cdot dx$$

Soit: $\lambda=\sigma\cdot dx$

Par conséquent, la contribution au potentiel en O due à la bande étroite PP' de largeur dx s'écrit (en tenant compte que $x=L$) :

$$dV=\frac{\sigma dx}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

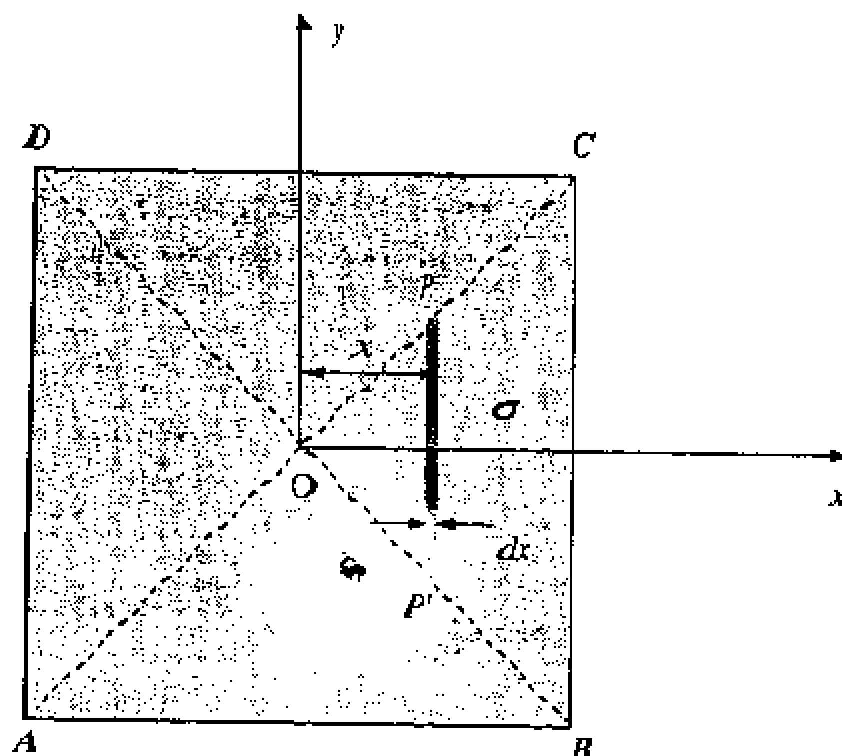


Fig. E13.2

3. La contribution au potentiel en O due au quart du carré, c'est-à-dire du triangle BOC), s'exprime alors:

$$V = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\sqrt{2}+1\right)\int_{x=0}^{x=\frac{a}{2}} dx = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\sqrt{2}+1\right)[x]_{x=0}^{x=\frac{a}{2}}$$

Soit: $$V = \frac{\sigma a}{4\pi\varepsilon_0} ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

4. Le potentiel en C crée par la couche carrée chargée uniformément est donc:

$$\boxed{V_{couche} = 4V = \frac{\sigma a}{\pi\varepsilon_0} ln\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

Exercice 14** — Energie potentielle électrostatique d'un système de charges quadratique

Aux quatre sommets d'un carré de centre O et de côté $a\sqrt{2}$, situé dans le plan xOy, sont fixés quatre ions positifs (Fig. E14). Chaque ion est assimilable à une charge ponctuelle $+e$.

1. Utiliser les symétries pour déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ au centre O(0,0,0) du carré. Quelle est son orientation au point M(0,0,z)?

2. Déterminer le potentiel électrique V au centre O du carré.
3. Déterminer le potentiel électrique V en un point M de l'axe Oz.
4. En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ au point $M(0,0,z)$.
5. Un proton de charge $+e$ est mobile le long de l'axe z'Oz. Exprimer la force $\vec{F}$ que subit le proton lorsqu'il se trouve au point $M(0,0,z)$.

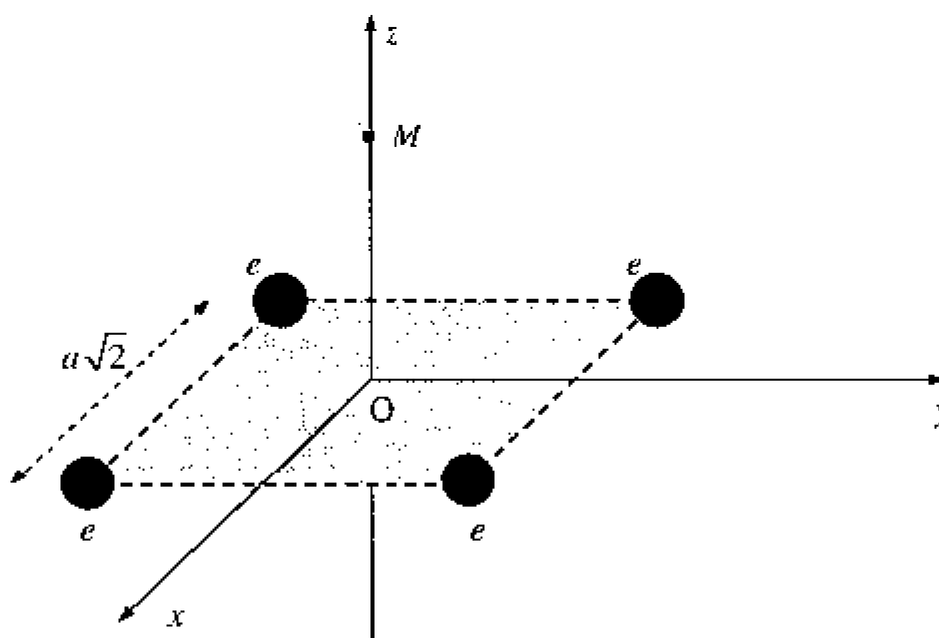


Fig. E14

6. En déduire par deux méthodes différentes l'expression de l'énergie potentielle du proton lorsqu'il se trouve en un point quelconque $M(0,0,z)$.

7. Ce proton aura-t-il une position d'équilibre? Si oui, cet équilibre est-il stable ou instable? Justifier votre réponse.

8. Déterminer l'énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_p$ du système formé par les quatre ions.

9. En déduire par deux méthodes différentes l'énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_p'$ d'un système composé de ces quatre ions et du proton lorsqu'il se trouve au centre O du carré.

10. Tracer l'allure du graphe du potentiel V en fonction de z.

11. Tracer l'allure du graphe de F_z en fonction de z.

Solution :

1. Les plans (xOz) et (yOz) sont des plans de symétrie; de même tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie; le plan (xOy) est également un plan de symétrie.

Le point O appartient à des plans de symétrie orthogonaux: c'est un centre de symétrie. Le champ électrostatique $\vec{E}$ est nul au point O.

L'axe Oz appartient à des plans de symétrie orthogonaux (les plans (xOz) et (yOz)): c'est un

axe de symétrie. Le champ électrostatique $\vec{E}_M = E\,\vec{k}$ est porté par l'axe Oz.

2. On applique le principe de superposition pour le potentiel électrostatique (Fig. E14).

$$V(O)=\sum_{i=1}^{4}V_i(O)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot e\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e}{a}$$

3. De la même façon, le potentiel électrostatique au point M s'écrit:

$$V(M)=\sum_{i=1}^{4}V_i(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot e\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

Soit : $$\boxed{V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e}{\sqrt{a^2+z^2}}}$$

On retrouve bien $V(O)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e}{a}$ pour $z=0$.

4. Le champ électrique dérive d'un potentiel, tel que: $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$. En coordonnées cartésiennes, les composants du gradient sont:

$$\overrightarrow{grad}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$$

La relation $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ s'écrit: $\vec{E}=-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}=-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$, car $V(M)$ ne dépend que de z $\left(\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=0\right)\Leftrightarrow E_x=E_y=0$.

En utilisant l'expression du potentiel $V(M)$ obtenue en (3), on trouve:

$$\boxed{\vec{E}_M=+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4ze}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}}$$

On vérifie bien que $\vec{E}(O)=0$ pour $z=0$.

5. Au point M, le proton de charge +e est soumis à une force électrostatique:

$$\boxed{\vec{F}_M=e\cdot\vec{E}_M=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e^2z}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}}$$

6.

Première méthode:

La force électrostatique dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$, telle que $\vec{F}=-\vec{\nabla}\mathcal{E}_p$. Par conséquent,

$$\overline{F} = -\frac{\partial}{\partial z}\cdot \mathcal{E}_p \overline{k} \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{E}_p = -F\, dz$$

Par intégration, on obtient en prenant l'origine de l'énergie potentielle à l'infini:

$$\int_0^{\mathcal{E}_p(z)} d\mathcal{E}_p = -\int_{z=\infty}^{z} F\, dz$$

Calcul de l'intégrale $I = \int_{\infty}^{z} \frac{z\, dz}{\left(a^2 + z^2\right)}$

On pose $u = z^2$, alors $du = 2 \cdot z\, dz$ et $I = \int_{\infty}^{z} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right)_{\infty}^{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{u}}\right)_{\infty}^{u}$

D'où : $I = -\frac{2}{\sqrt{u}}$

Finalement, on obtient : $\boxed{\mathcal{E}_p(z) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e^2}{\sqrt{a^2 + z^2}}}$

» Deuxième méthode:

L'énergie potentielle du proton +e placé au point M, s'écrit, par définition:

$$V(M) = \sum_{i=1}^{4} V_i(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot e\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)$$

7. Le dipôle aura une position d'équilibre si:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e^2 z}{\left(a^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0$$

La position $z = 0$ est stable si elle correspond à un minimum de l'énergie potentielle, instable, si elle correspond à un maximum de l'énergie potentielle.

Les minima de l'énergie potentielle sont caractérisés par une dérivée seconde positive.

Les maxima de l'énergie potentielle sont caractérisés par une dérivée seconde négative:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial z^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4e^2 \cdot \left(\frac{\left(a^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\cdot 2z^2 \cdot \left(a^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^2 + z^2\right)^3}\right)$$

Soit : $$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4e^2 \cdot \left(a^2 + z^2\right)\left(\frac{a^2 + z^2 - 3z^2}{\left(a^2 + z^2\right)^3}\right) < 0$$

La position $z = 0$ correspond donc à un équilibre instable du proton.

8. L'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système de quatre charges ponctuelles, s'écrit:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i V(M_i)$$

où M_1, M_2, M_3 et M_4 sont les positions des quatre protons de charge $+e$,

et $$V(M_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} V_j(M_i).$$

En raison de la symétrie du système, on trouve:

$$V(M_1) = V(M_2) = V(M_3) = V(M_4) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot e\cdot\left(\frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{a\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot e\cdot\left(\frac{2}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(e\cdot a\cdot\frac{4+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}a^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot e^2}{a}$$

Finalement, l'énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_p$ du système est donnée par:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i V(M_i) = \frac{1}{2}\left(4\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot e^2}{a}\right)$$

Soit, $$\boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(1+2\sqrt{2}\right)\cdot e^2}{a}}$$

9. V maximum $\Leftrightarrow \frac{dV}{dz} = 0 \Rightarrow E_z = 0 \Rightarrow z = 0$

Donc: $$V_{max} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e}{a}$$

$$\frac{dE_z}{dz} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q\left(a^2 - 2z^2\right)}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2z^2 = 0 \Rightarrow \qquad \theta_0 = \pi$$

Pour $z = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\sqrt{2}\,q}{a\sqrt{3}}$ et $E_z = \pm\frac{4q\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{4q\frac{a}{\sqrt{2}}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\frac{3a^2}{2}}\cdot\left(\frac{3a^2}{2}\right)}$

Soit $$\boxed{E_z = \pm\frac{2q}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 a^2}}$$

Les courbes représentatives de $V(z)$ et de $E_z(z)$ sont données respectivement par les figures E14.1 et E14.2.

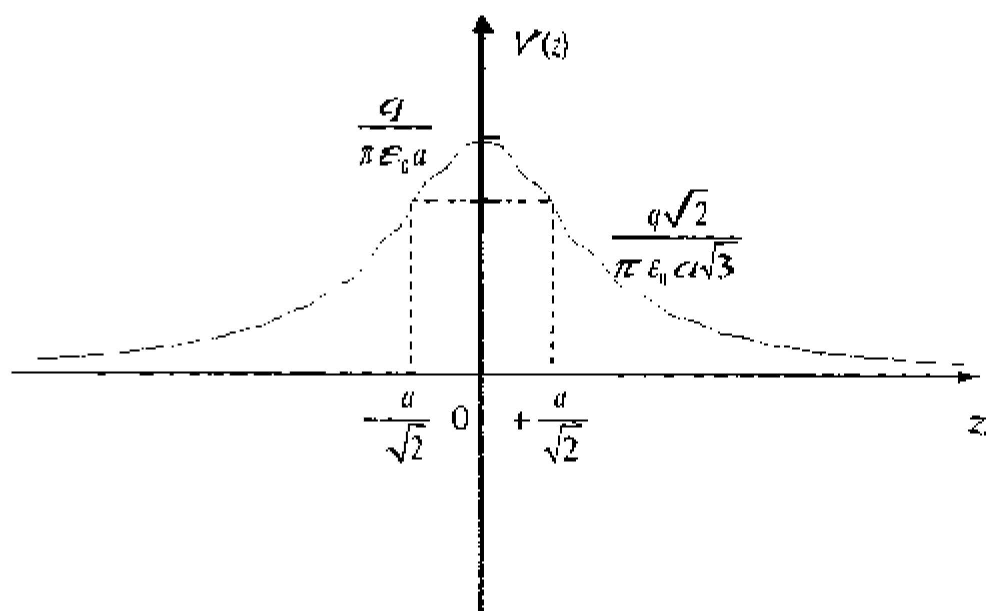


Fig. E14.1

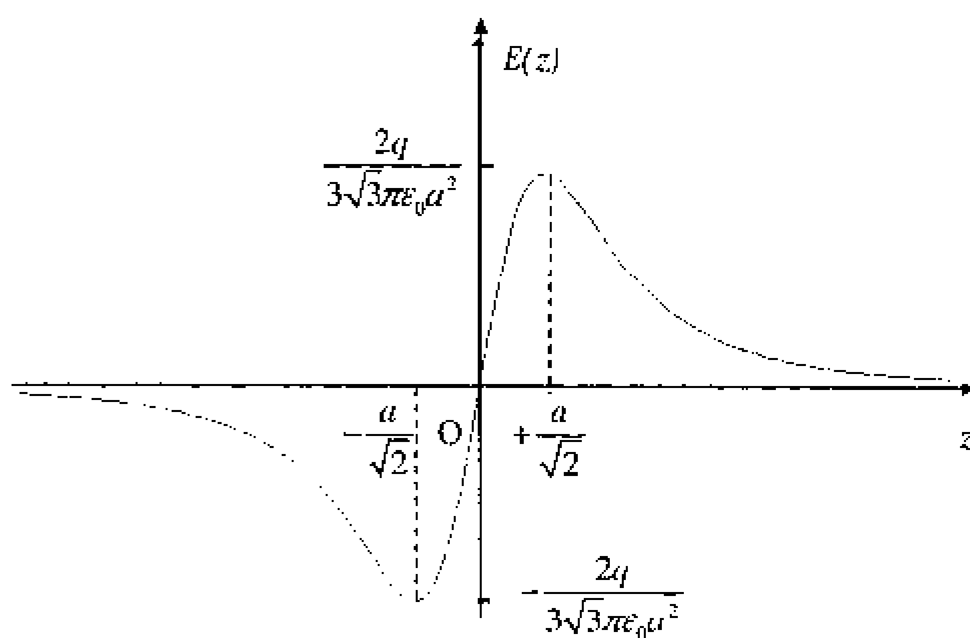


Fig. E14.2

4. Flux électrostatique Théorème de Gauss

Exercice 15 ** — Flux électrostatique créé par une charge ponctuelle

1. On place une charge ponctuelle q au centre d'un cube d'arête a. Calculer le flux du champ électrostatique créé par la charge à travers chaque face du cube.

2. Reprendre la même question pour la charge q placée à l'un des sommets du cube.

3. La charge q est maintenant placée au sommet d'un tétraèdre régulier. Calculer le flux du champ électrostatique créé par la charge à travers chaque face du tétraèdre.

Solution :

1. Par définition, le flux élémentaire créé par une charge ponctuelle q, placée en O, à travers une surface fermée S, est donné par:

$$\boxed{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega}$$

Lorsque la charge ponctuelle q est placée au centre O du cube, on voit depuis le point M, le cube (tout l'espace) sous un angle solide $\Omega = 4\pi$.

Par conséquent, depuis le point O, on voit chacune des faces sous un angle solide $\Omega_f = \frac{4\pi}{6}$. On en déduit l'expression du flux électrique à travers chaque face du cube:

$$\boxed{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi}{6} = \frac{q}{6\varepsilon_0}}$$

2. Lorsque la charge ponctuelle q est placée en l'un des sommets du cube, le trièdre (Oxyz) dans lequel se trouve le cube, est vu depuis ce sommet sous un angle solide $\Omega = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

Numérotons les différentes faces pour faciliter l'écriture des expressions du flux:

① La face de gauche;
② La face du bas;
❸ La face de droite;
④ La face de derrière;
❺ La face du haut;
❻ La face de devant.

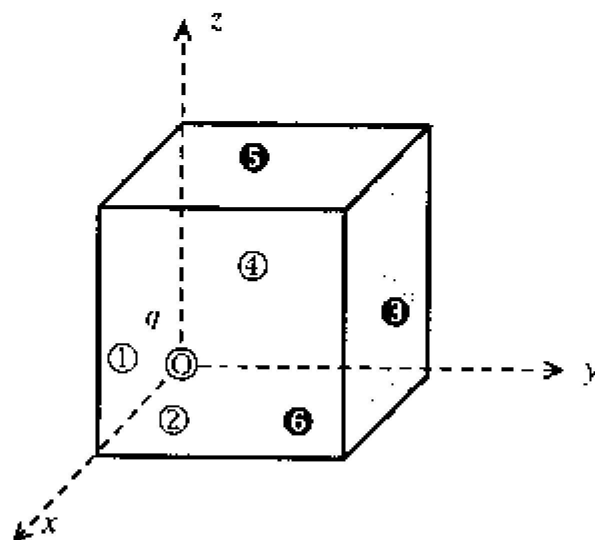


Fig. E15

On en déduit l'expression du flux électrique à travers les faces du cube (Fig. E15):

$$\boxed{\phi_c = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi}{2} = \frac{q}{8\varepsilon_0}}$$

La répartition du flux $\phi_c = \frac{q}{8\varepsilon_0}$ s'effectue de la façon suivante:

- Les faces ①, ② et ④ (les faces adjacentes au sommet O) sont vues sous un angle solide nul. Elles sont donc traversées par un flux nul;
- Les trois faces ❸, ❺ et ❻ reçoivent le même flux ϕ', en raison de la symétrie:

$$\boxed{\phi' = \frac{\phi_c}{3} = \frac{q}{24\varepsilon_0}}$$

3. La charge q étant maintenant placée au sommet d'un tétraèdre régulier, le flux du champ électrostatique créé par la charge à travers les faces du tétraèdre, adjacentes au sommet où se trouve la charge q, est nul.

Du sommet où se trouve la charge, on voit le tétraèdre sous un angle solide $\Omega = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$.

La face en regard du sommet reçoit alors un flux électrostatique: $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi}{3}$

Soit: $$\boxed{\phi = \frac{q}{12\varepsilon_0}}$$

4. Par définition, le flux élémentaire créé par une charge ponctuelle q, placée en O, à travers une surface fermée S, est donné par:

$$\boxed{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega}$$

Lorsque la charge ponctuelle q est placée au centre O du cube, on voit depuis le point M, le cube (tout l'espace) sous un angle solide $\Omega = 4\pi$.

Par conséquent, depuis le point O, on voit chacune des faces sous un angle solide $\Omega_f = \frac{4\pi}{6}$.

On en déduit l'expression du flux électrique à travers chaque face du cube:

$$\boxed{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi}{6} = \frac{q}{6\varepsilon_0}}$$

5. Lorsque la charge ponctuelle q est placée en l'un des sommets du cube, le trièdre (Oxyz) dans lequel se trouve le cube, est vu depuis ce sommet sous un angle solide $\Omega = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit l'expression du flux électrique à travers les faces du cube (Fig. E15):

$$\boxed{\phi_c = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi}{2} = \frac{q}{8\varepsilon_0}}$$

Exercice 16 ** — Champ et potentiel électrostatiques créés par deux sphères concentriques chargées en surface

On considère deux sphères S_1 et S_2 concentriques (Fig. E16.1), creuses et d'épaisseur négligeable, de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), et de charges totales respectives $Q_1 = +Q$ et $Q_2 = -Q$. Ces charges sont distribuées uniformément sur les surfaces des sphères correspondantes.

1. Exprimer le champ électrique $\vec{E}(r)$ et le potentiel $V(r)$ en tout point de l'espace.

2. On place une charge ponctuelle $+Q$ au centre des deux sphères (Fig. E16.2). Exprimer le champ électrique total en tout point M de l'espace.

On suppose maintenant que les deux sphères S_1 et S_2 sont chargées uniformément en surface avec des densités respectives $-\sigma$ et $+\sigma$ (Fig. E16.1).

3. Calculer l'intensité du champ électrique en tout point M de l'espace.

4. Tracer la courbe $E(r)$ pour les trois cas et la courbe $V(r)$ pour le premier cas seulement.

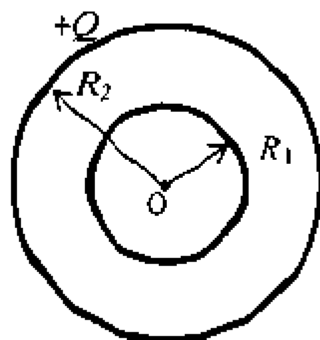


Fig. E16.1

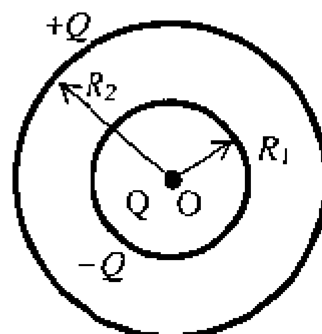


Fig. E16.2

Solution :

1.

Détermination du champ électrique

- Par symétrie, le champ électrique est radial:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E(r,\theta,\varphi)\vec{u_r}$$

- Par symétrie (invariance par n'importe quelle rotation autour de O), le champ électrique est indépendant des variables angulaires θ et φ:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E(r)\vec{u_r}$$

En raison de la symétrie du champ électrique, on choisit comme surfaces de Gauss des sphères de rayon r et de centre O. On déterminera le champ électrostatique dans trois régions :

- $0 < r < R_1$

Choisissons une surface de Gauss sphérique Σ_1 de rayon $0 < r < R_1$ (Fig. E16.1); Σ_1 ne contient pas de charges électriques, le champ électrique est nul. L'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire:

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\vec{dS} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(r)=0}$$

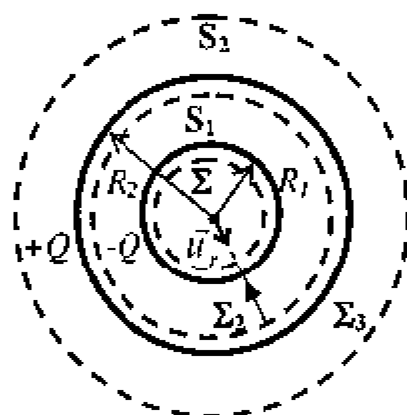


Fig. E16.1

- $R_1 < r < R_2$

Choisissons maintenant une surface de Gauss Σ_2 comprise entre S_1 et S_2; le champ électrique est perpendiculaire à Σ_2 et son module est constant en tout point de Σ_2. La surface Σ_2 contient une charge électrique totale $-Q$. L'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire:

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oint\!\!\oint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot\vec{dS}\,\vec{u_r}\cdot\vec{n} = \oint\!\!\oint_{\Sigma_2} E\,dS = E\,S = -\frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

On obtient: $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}$. Le champ électrique $\vec{E}(r)$ est dirigé de S_2 vers S_1.

- $r > R_2$

Choisissons cette fois ci, une surface de Gauss sphérique Σ_3 de rayon $r > R_2$; Σ_3 contient une charge électrique totale nulle, le champ électrique à l'extérieur de S_2 est nul. L'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire:

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_3} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{-Q+Q}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(r)=0}$$

Récapitulatif

- Pour $r < R_1$, $\vec{E}(r) = \vec{0}$,
- Pour $R_1 < r < R_2$, $\vec{E} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}_r$,
- Pour $r > R_2$, $\vec{E}(r) = \vec{0}$.

Détermination du potentiel électrostatique

- **Pour $r < R_1$**

Le potentiel est obtenu par intégration:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow dV(r) = 0$$

On obtient: $V(r) = V_1$, où V_1 est une constante.

- **Pour $R_1 < r < R_2$**

Le champ électrique dérive d'un potentiel $\Rightarrow \vec{E}(r) = -\vec{\nabla}V(r)$

$$-\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = \vec{E}(r) \Rightarrow dV(r) = -\vec{E}(r)\cdot\vec{dr} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\underbrace{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r}_{1}dr$$

Par intégration, on obtient: $V(r) = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} + V_2$, où V_2 est une constante à déterminer.

- **Pour $r > R_2$**

Le champ électrique dérive d'un potentiel $\Rightarrow E(r) = -\dfrac{dV}{dr}$

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow dV(r) = 0$$

On obtient: $V(r) = V_3$, où V_3 est une constante à déterminer.

Détermination des constantes:

- Le potentiel est nul à l'infini (par convention):

$$\lim_{r\to\infty} V(r) = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{r\to\infty}(V_3) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_3 = 0}$$

- Le potentiel est continu en $r = R_2$:

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2} + V_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2}}$$

- Le potentiel est continu en $r = R_1$:

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2} = V_1 \quad\Rightarrow\quad V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

On remarque que V_1 est le potentiel en O créé par les charges $-Q$ et $+Q$ aux distances R_1 et R_2 respectivement.

- **Récapitulatif**
  - Pour $r < R_1$, $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$,
  - Pour $R_1 < r < R_2$, $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r}\right)$
  - Pour $r > R_2$, $V(r) = 0$

2.

- **Détermination du champ électrique**

En raison de la symétrie du champ électrique, on choisit comme surfaces de Gauss des sphères de rayon r et de centre O. On déterminera également le champ électrostatique dans trois régions :

- $0 < r < R_1$

Choisissons une surface de Gauss sphérique Σ_1 de rayon $0 < r < R_1$ (Fig. E16.2); Σ_1 contient une charges électrique $+Q$, l'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}\,\vec{u}_r\cdot\vec{n} = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1} E\,dS = E\,S = +\frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

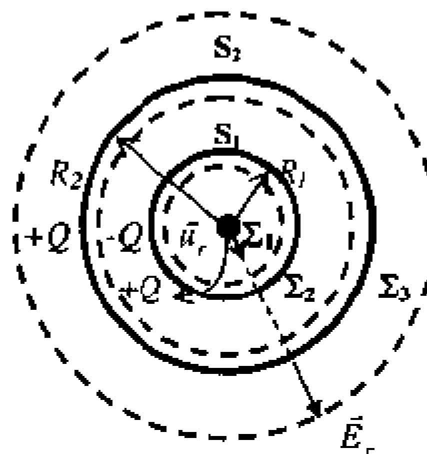


Fig. E16.2

On obtient:

$$\boxed{\vec{E} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r}$$; le champ électrique diverge de la charge ponctuelle $+Q$.

- $R_1 < r < R_2$:

Choisissons maintenant une surface de Gauss Σ_2 comprise entre S_1 et S_2; Σ_2 contient une charge électrique totale nulle, l'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{-Q+Q}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \vec{0}}$$

- $r > R_2$

Choisissons cette fois ci, une surface de Gauss sphérique Σ_3 de rayon $r > R_2$; Σ_3 contient une charge électrique totale égale à +Q, l'application du théorème de Gauss permet donc d'écrire:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1} E\,dS\,\vec{u}_r\cdot\vec{n} = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1} E\,dS = E\,S = +\frac{Q}{\varepsilon_0},$$

On obtient: $\boxed{\vec{E} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r}$ le champ électrique $\vec{E}(r)$ diverge de la sphère S_2.

▶ **Récapitulatif**

- **Pour** $r < R_1$, $\vec{E} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$,
- **Pour** $R_1 < r < R_2$, $\vec{E}(r) = \vec{0}$,
- **Pour** $r > R_2$, $\vec{E} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$.

3.

▶▶ **Détermination du champ électrique**

En raison de la symétrie du champ électrique, on choisit comme surfaces de Gauss des sphères de rayon r et de centre O. On déterminera le champ électrostatique dans trois régions :

- $0 < r < R_1$

$$\oiint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = 0 \quad \Rightarrow \quad E(r) = 0$$

- $R_1 < r < R_2$

$$\oiint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \oiint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}\,\vec{u}_r\cdot\vec{n} = \oiint_{\Sigma_2} E\,dS = E\,S = -\frac{Q_1}{\varepsilon_0} = -\frac{4\pi R_1^2\sigma}{\varepsilon_0},$$

On obtient: $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{r^2}\vec{u}_r}$ Le champ $\vec{E}(r)$ est dirigé de S_2 vers S_1.

- $r > R_2$

$$\oiint_{\Sigma_3} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{-Q_1+Q_2}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)\sigma}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{r^2}\vec{u}_r}$$

▶ **Récapitulatif**

- **Pour** $r < R_1$, $\vec{E}(r) = \vec{0}$,
- **Pour** $R_1 < r < R_2$, $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{r^2}\vec{u}_r$,
- **Pour** $r > R_2$, $\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^2 - R^2\right)}{r^2}\vec{u}_r$.

▶▶ ***Détermination du potentiel électrostatique***

- **Pour** $r < R_1$

Le potentiel est obtenu par intégration:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow dV(r) = 0$$

On obtient: $V(r) = V_1$, où V_1 est une constante.

- **Pour $R_1 < r < R_2$**

Le champ électrique dérive d'un potentiel $\Rightarrow \vec{E}(r) = -\vec{\nabla}V(r)$

$$-\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = \vec{E}(r) \Rightarrow dV(r) = -\vec{E}(r)\cdot\vec{dr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{r^2}\underbrace{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r}_{1}dr$$

Par intégration, on obtient: $V(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{r} + V_2$, où V_2 est une constante à déterminer.

- **Pour $r > R_2$**

Le champ électrique dérive d'un potentiel $\Rightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr}$

$$-\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = \vec{E}(r) \Rightarrow dV(r) = -\vec{E}(r)\cdot\vec{dr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{r^2}\underbrace{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r}_{1}dr$$

On obtient: $V(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{r} + V_3$, où V_3 est une constante à déterminer.

- **Détermination des constantes:**

- Le potentiel est nul à l'infini (par convention):

$$\lim_{r\to\infty} V(r) = 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty}(V_3) = 0 \Rightarrow V_3 = 0$$

- Le potentiel est continu en $r = R_2$:

$$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{R_2} + V_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{R_2}, \Rightarrow V_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R_2$$

- Le potentiel est continu en $r = R_1$:

$$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{R_1} + V_2 = V_1 \Rightarrow -\frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} = V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(R_2 - R_1)$$

- **Récapitulatif**

  - **Pour $r < R_1$,** $V_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(R_2 - R_1)$,
  - **Pour $R_1 < r < R_2$,** $V(r) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{r} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R_2$
  - **Pour $r > R_2$,** $V(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{r}$

4. Les tracés de $E(r)$ pour les cas (1), (2) et (3) sont représentés par les figures E16.3, E16.4 et E16.5. Le tracé de $V(r)$ pour le cas (1) est représenté par la figure P16.6.

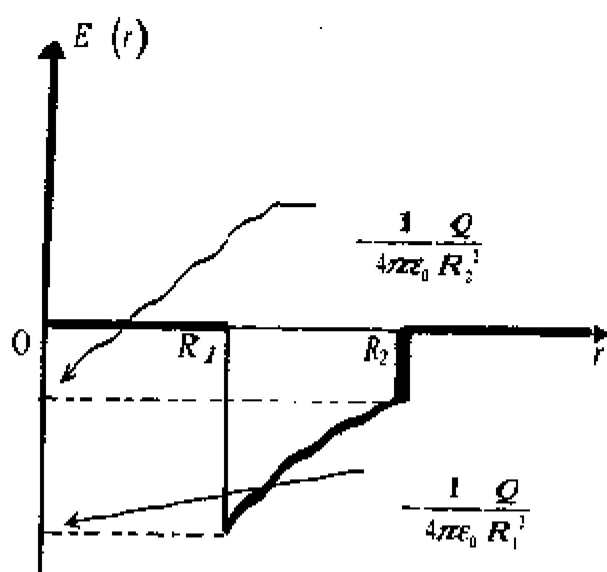


Fig. E16.3

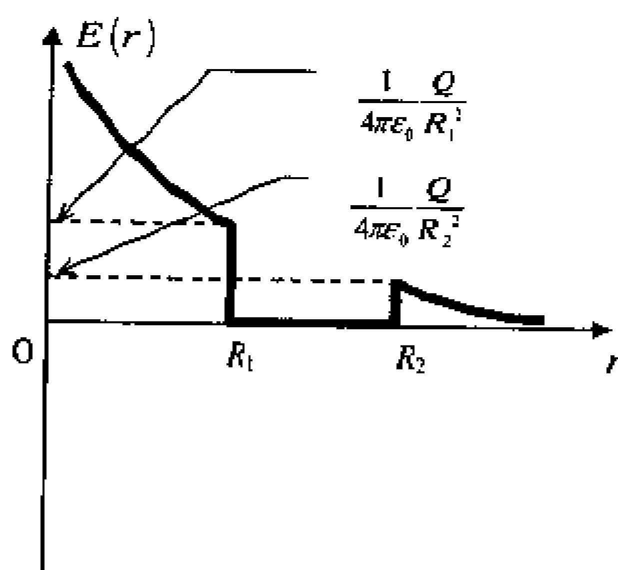


Fig. E16.4

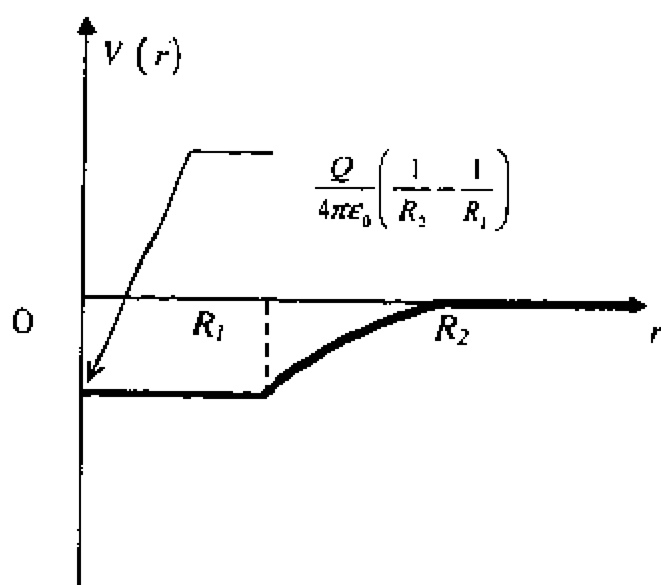


Fig. E16.5

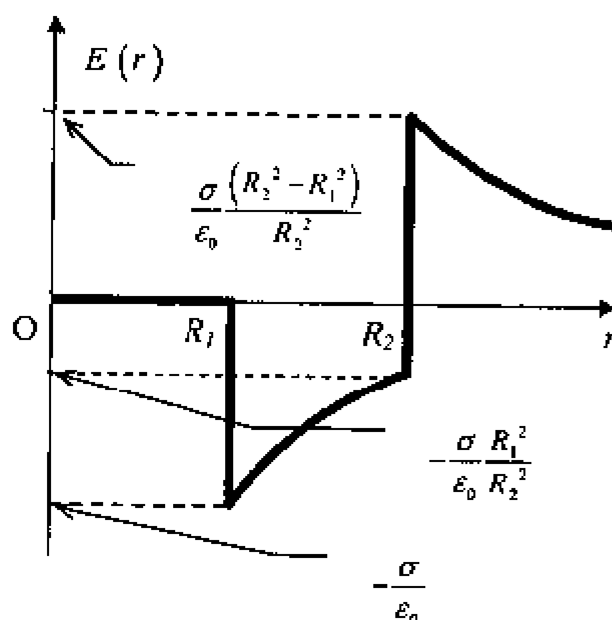


Fig. E16.6

Problème 17*** — Plan chargé et principe de superposition

Une densité surfacique de charges σ est uniformément répartie sur une mince feuille plane d'aluminium, de surface infinie (Fig. E17).

1. Etudier les symétries et les invariances de cette distribution de charges.

2. Déterminer le champ électrostatique créé par ce plan indéfini.

3. On pratique une ouverture circulaire, de rayon R, sur la feuille d'aluminium. Déterminer le champ électrostatique créé en un point M de l'axe du trou, dépourvu de charges (Fig. E17).

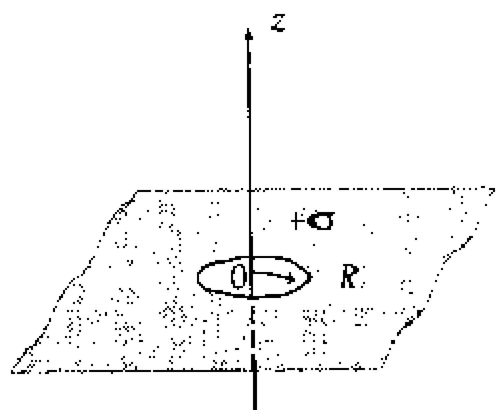


Fig. E17

Solution :

1. ***Observation et analyse des symétries***

Tout plan perpendiculaire à la surface chargée (plan Π) est un plan de symétrie (Fig. E17.1). Par conséquent, le champ électrique $\vec{E}$ appartient à ce plan de symétrie en tout point de celui-ci. Donc, en tout point de l'espace, $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface chargée (plan Π).

$$\vec{E} = E\,\vec{n} \text{ , où } \vec{n} \text{ est un vecteur unitaire normal au plan } \Pi.$$

En outre, le plan Π est également un plan de symétrie; Donc, en deux points symétriques par rapport au plan Π, les vecteurs champs électriques sont égaux et opposés: $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$.

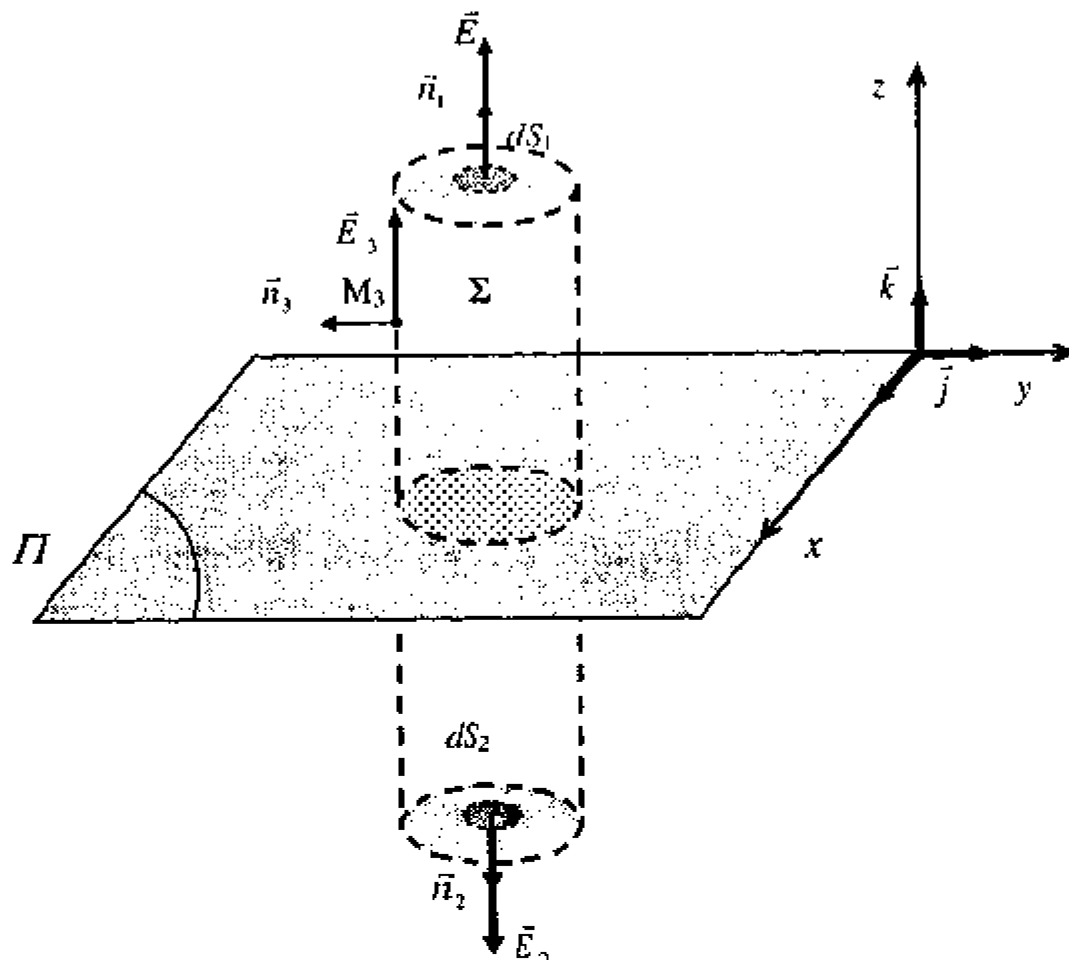


Fig. E17.1

Par ailleurs, la distribution est invariante par rotation autour de l'axe z. Donc le champ électrique ne dépend ni de x, ni de y: $E(x,y,z) = E(z)$.

La distribution est également invariante par translation le long de l'axe des z; donc le champ électrique ne dépend pas de z.

En définitive, en tout point de l'espace $M(x,y,z)$ le champ électrique ne dépend pas des coordonnées du point M: $E(x,y,z) = E$.

En d'autres termes, tous les points du demi-espace au dessus (ou au dessous) du plan Π, sont équivalents; le champ électrique y est donc uniforme. Ainsi, au point M_3, le champ électrique est égal à $\vec{E}_1$ (Fig. E17.1): $\vec{E}(M_3) = \vec{E}(M_1) = \vec{E}_1$, M_1 étant un point appartenant à la surface dS_1.

2. *Choix de la surface de Gauss*

On prend comme surface de Gauss, une boîte cylindrique, perpendiculaire à la surface chargée (plan Π), et fermée par deux sections droites dS_1 et dS_2 symétriques par rapport à Π. Elle découpe sur le plan un élément de surface dS, tel que $dS = dS_1 = dS_2$.
Le flux électrostatique sortant de dS_1 est:

$$d\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{dS_1} = E\, dS\; \vec{k} \cdot \vec{n}_1 = E\, dS\ ,$$

où: $\vec{E}_1 = E\,\vec{k}$, $\vec{k}$ étant un vecteur unitaire de la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $\overrightarrow{dS_1} = dS\; \vec{n}_1$

Le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{n}_1$ étant égal à un ($\vec{k}$ et $\vec{n}_1$ sont colinéaires).

De la même façon, on obtient le flux électrostatique sortant de dS_2:

$$d\phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{dS_2} = -E\, dS\; \vec{k} \cdot \vec{n}_2 = E\, dS\ ,$$

où: $\vec{E}_2 = -E\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{dS_2} = dS\; \vec{n}_2$

Le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{n}_2$ étant égal à moins un ($\vec{k}$ et $\vec{n}_1$ sont opposés).

Le flux sortant de la surface latérale est nul, car en tout point, le champ électrique est parallèle à cette surface. En effet, en tout point M_3 appartenant à la surface latérale, le produit scalaire $\vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{dS_1}$ est constamment nul, car $\vec{E}(M_3) = \vec{E}_1$ est perpendiculaire à $\vec{n}_3$.

En définitive, le flux total sortant de la surface Σ se réduit à celui sortant des surfaces terminales dS_1 et dS_2:

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = 2\,E\, dS$$

▸▸ *Application du théorème de Gauss*

L'élément de surface dS découpé dans la surface électrisée porte la charge $dq = \sigma dS$.

D'après le théorème de Gauss, le flux électrostatique sortant de la surface Σ est:

$$d\phi = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0}$$

En comparant les deux équations précédentes, on trouve:

$$d\phi = \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0} = 2E_\Pi\, dS$$

On trouve finalement: $\boxed{E_\Pi = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

Par conséquent:

$$\overrightarrow{E_{\Pi}} = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} \qquad \begin{cases} + & \text{si} \quad z > 0 \\ - & \text{si} \quad z < 0 \end{cases}$$

3. Cette distribution de charges s'obtient par superposition des deux distributions de charges suivantes (Fig. E17.2):

- un plan indéfini portant une densité surfacique uniforme désignée par σ.
- un disque de rayon R portant une densité volumique de charge uniforme et négative $-\sigma < 0$.

Les symétries des distributions de charges impliquent les symétries des champs électrostatiques. Les lois de l'électrostatique étant linéaires, on peut appliquer le principe de superposition.

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$, créé par cette distribution en un point M quelconque, est obtenu en faisant la somme vectorielle des champs $\overrightarrow{E_{\Pi}}(M)$ et $\overrightarrow{E_D}(M)$ créés séparément, respectivement par le plan infini et le disque D.

$$\vec{E}(M) = \overrightarrow{E_{\Pi}}(M) + \overrightarrow{E_D}(M)$$

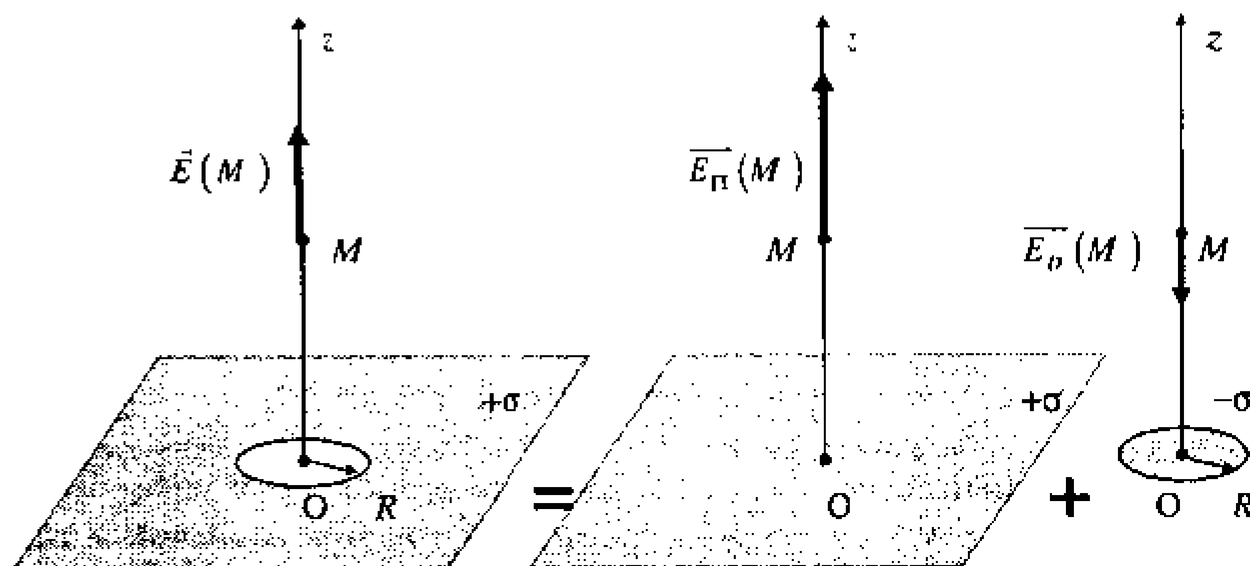


Fig. E17.2

Les champs électrostatiques $\overrightarrow{E_{\Pi}}(M)$ et $\overrightarrow{E_D}(M)$ créés, respectivement par le plan infini et le disque D, ont été calculé précédemment. Le résultat obtenu s'écrit:

- pour le plan infini:

$$\overrightarrow{E_{\Pi}} = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} \qquad \begin{cases} + & \text{si} \quad z > 0 \\ - & \text{si} \quad z < 0 \end{cases}$$

- pour le disque D:

$$\overrightarrow{E_D} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{\pm 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right\}\vec{k} \qquad \begin{cases} + & \text{si} \quad z > 0 \\ - & \text{si} \quad z < 0 \end{cases}$$

Pour le plan muni d'une ouverture, on obtient:

5. Dipôle électrostatique

Exercice 18 *** — Mouvement oscillatoire d'un dipôle dans le champ d'un anneau chargé

On considère un anneau métallique de centre O et de rayon R portant une charge Q répartie uniformément avec la densité linéique λ (Fig. E18).

1. Déterminer le potentiel électrostatique en un point M de l'axe Oz.
2. En déduire le champ électrostatique au point M.
3. Tracer l'allure de $V(z)$ et $E(z)$.

On place au point $M(0,0,z)$ un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = qd\,\vec{k}$ et de masse m, qui se déplace le long de l'axe Oz. Ce dipôle est constitué de deux charges $(-q,+q)$, dont le centre est en M et dont la distance d est faible devant la distance z.

4. Quelles sont les forces qui sont appliquées au dipôle?
5. Déterminer les positions d'équilibre du dipôle et quelle serait la nature de cet équilibre?

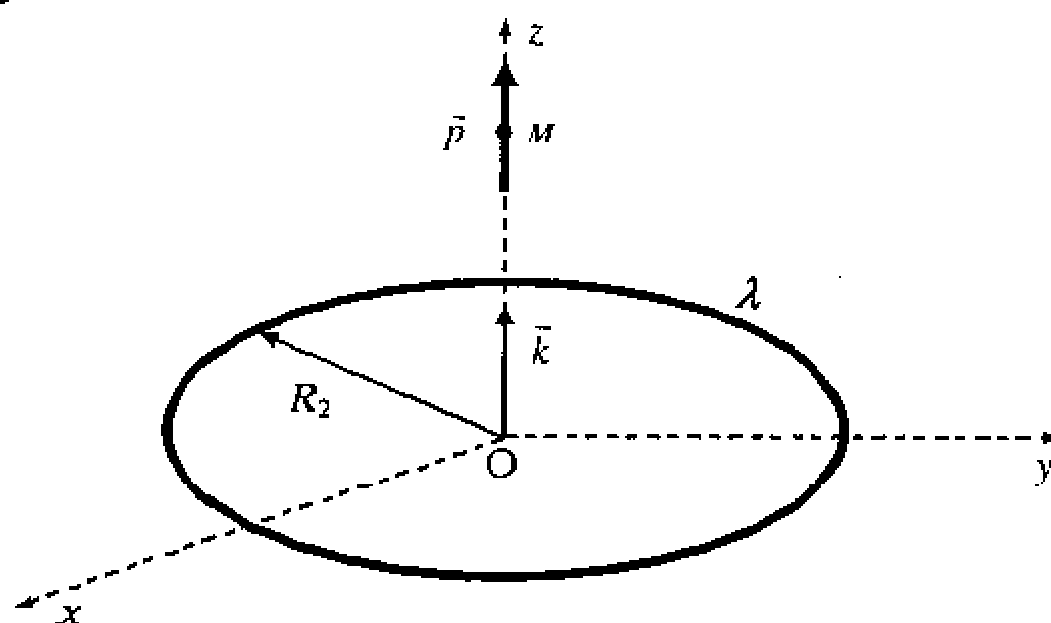


Fig. E18

6. Soit z_e la position d'équilibre stable du dipôle. A l'instant t = 0, on écarte ce dipôle d'une distance Δz_0 très faible devant z_e ($\Delta z_0 << z_e$).
Déterminer la pulsation des oscillations qui en résultent.

Solution :

1. Ce calcul a été réalisé dans l'exercice 11. Le résultat obtenu est :

$$\boxed{V_M(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}}$$

2. Le champ électrostatique dérive d'un potentiel, tel que : $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. Le long de l'axe Oz, le potentiel est une fonction de z seulement. Par conséquent :

$$\vec{E} = E(z)\vec{k} = -\frac{dV}{dz}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}}$$

3. Les graphes de $V(z)$ et $E(z)$ sont représentés sur la figure E18.1.

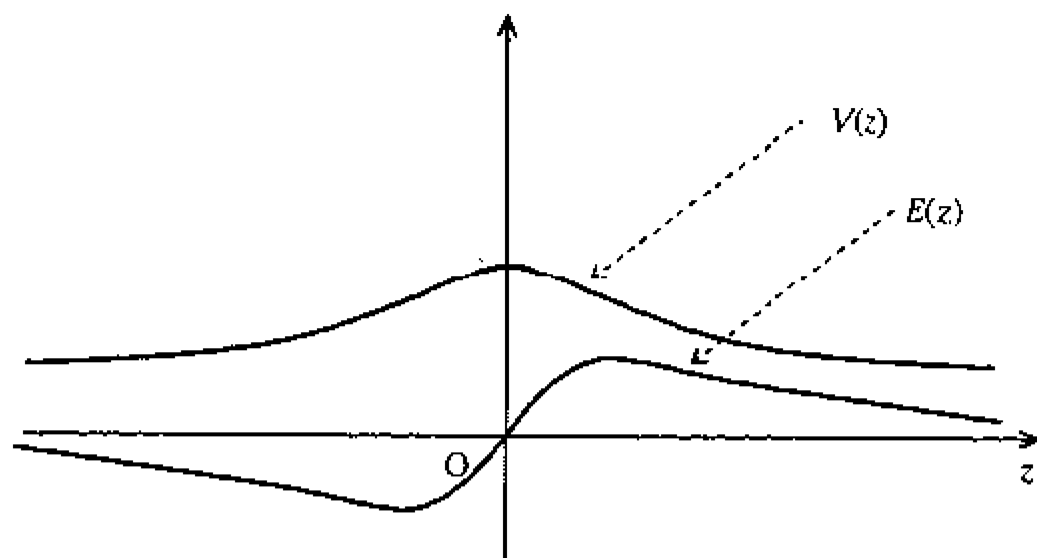


Fig. E18.1

4. Le dipôle est placé dans le champ électrique $\vec{E}$ créé par l'anneau chargé. Le champ $\vec{E}$ n'étant pas uniforme, son action se traduit par:

– un couple de moment:

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{p} \wedge \vec{E}\right| = p\, E \sin 0 = 0 \quad (\ \vec{p} \text{ et } \vec{E} \text{ sont colinéaires });$$

– une force résultante :

$$\vec{F} = q\vec{E}(z+d) - q\vec{E}(z) = q\left[E(z+d) - E(z)\right]\vec{k} = q\,d\,\frac{dE}{dz}\vec{k}$$

où $\quad \vec{E} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{k} \quad$ et $\quad d << z$.

On obtient : $\boxed{\vec{F} = qd\,\dfrac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\dfrac{R^2-2z^2}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{5}{2}}}\vec{k}}$

■ En général, on utilise l'expression :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,\mathcal{E}_p = \overrightarrow{grad}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(p\cdot E\right) = p\,\frac{dE}{dz}\vec{k}$$

5. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la force résultante soit nulle :

$$\vec{F} = qd\,\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{R^2-2z^2}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{5}{2}}}\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow R^2-2z^2 = 0$$

D'où : $\boxed{z = \pm\dfrac{R}{\sqrt{2}}}$

Il y a donc deux positions d'équilibre : $z_1 = +\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ et $z_2 = -\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

- La position d'**équilibre stable** correspond à $z_1 = +\dfrac{R}{\sqrt{2}}$
  - $\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires et de même sens;
  - $\mathcal{E}_p(z_1) = -\vec{p}\cdot\vec{E}(z_1) = -pE(z_1)$ (l'**énergie potentielle** $\mathcal{E}_p(z_1)$ du dipôle est **minimale**).
- La position d'**équilibre instable** correspond à $z_1 = -\dfrac{R}{\sqrt{2}}$
  - $\vec{F} = \vec{0}$; $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires mais de sens contraires;
  - $\mathcal{E}_p(z_2) = -\vec{p}\cdot\vec{E}(z_2) = +pE(z_2)$ (l'**énergie potentielle** $\mathcal{E}_p(z_2)$ du dipôle est **maximale**).

6. On applique la relation fondamentale de la dynamique au dipôle en mouvement. Le poids du dipôle est négligeable devant la force électrostatique $\vec{F}(z_e+\Delta z)$.

On obtient alors:

$$F(z_e+\Delta z) = m\frac{d^2(z_e+\Delta z)}{dt^2} = m\frac{d^2 z_e}{dt^2} + m\frac{d^2(\Delta z)}{dt^2} = m\frac{d^2(\Delta z)}{dt^2}$$

La force électrostatique s'exprime, d'après (4), avec $z_e = +\dfrac{R}{\sqrt{2}}$:

$$\vec{F} = qd\,\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{R^2-2(z_e+\Delta z)^2}{\left((z_e+\Delta z)^2+R^2\right)^{\frac{5}{2}}}\vec{k} = qd\,\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{R^2-2\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{R}\Delta z\right)^2}{\left[\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{R}\Delta z\right)^2+R^2\right]^{\frac{5}{2}}}\vec{k}$$

Soit:

$$\vec{F}=qd\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{R^2-2\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1+2\frac{\sqrt{2}}{R}\Delta z\right)}{\left[\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\left(1+2\frac{\sqrt{2}}{R}\Delta z\right)+R^2\right]^{\frac{5}{2}}}\vec{k}=qd\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{-2\sqrt{2}R\,\Delta z}{\left(3\frac{R^2}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}\vec{k}$$

$$=qd\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{-2\sqrt{2}R}{\left(3\frac{R^2}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}\Delta z\,\vec{k}=-qd\frac{\lambda}{\varepsilon_0}\frac{8}{9\sqrt{3}R^3}\Delta z\,\vec{k}$$

Le dipôle étant légèrement écarté de O ($\Delta z \ll z_e$), l'équation du mouvement devient:

$$m\frac{d^2(\Delta z)}{dt^2}=-qd\frac{\lambda}{\varepsilon_0}\frac{8}{9\sqrt{3}R^3}\cdot(\Delta z)$$

Finalement, on a:

$$\frac{d^2(\Delta z)}{dt^2}+qd\frac{\lambda}{\varepsilon_0 m}\frac{8}{9\sqrt{3}R^3}\cdot(\Delta z)=0$$

C'est l'équation caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω et de période $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Cette équation est de la forme:

$$\frac{d^2(\Delta z)}{dt^2}+\omega^2\cdot(\Delta z)=0$$

Où:

$$\boxed{\omega=\frac{2}{3R}\sqrt{\frac{2qd\lambda}{\sqrt{3}R\,\varepsilon_0 m}}}$$

Donc, la période T est donnée par:

$$\boxed{T=3\pi R\sqrt{\frac{\sqrt{3}R\,\varepsilon_0 m}{2qd\lambda}}}$$

On peut exprimer la période en fonction du moment dipolaire p et de la charge totale Q de l'anneau ($p=qd$ et $Q=2\pi R\lambda$). On obtient :

$$\boxed{T=3\pi R^2\sqrt{\frac{\sqrt{3}\,\pi\varepsilon_0 m}{pQ}}}$$

Vérification de la formule

On utilise l'équation aux dimensions:

$$[T]=[3\pi][R^2]\sqrt{\frac{[\sqrt{3}\,\pi][\varepsilon_0][m]}{[p][Q]}}$$

En utilisant:

$$[Q] = I \cdot T^{-1}; \quad [\varepsilon_0] = M^{-1} \cdot L^{-1} \cdot T^{2} \cdot [Q]^{2} \cdot L^{-2} = M^{-1} \cdot L^{-1} \cdot T^{2} \cdot I^{2} \cdot T^{-2} \cdot L^{-2}$$

On obtient :

$$T = L^{2} \cdot \left(M^{-1} \cdot L^{-1} \cdot T^{2} \cdot I^{2} \cdot T^{2} \cdot L^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (M)^{\frac{1}{2}} \cdot (I \cdot T \cdot L)^{-\frac{1}{2}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \cdot T^{\frac{1}{2}} = T$$

Cette équation est homogène à un temps. Elle est donc satisfaisante.

Exercice 19 *** — Stabilité d'un dipôle dans le champ d'un fil rectiligne infini uniformément chargé.

1. Soit un filament rectiligne infiniment long, portant une charge λ par unité de longueur (Fig. E19). En effectuant un calcul direct, montrer que le champ électrostatique créé par cette distribution de charges en un point M est donné par:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

2. On place un dipôle au point M, distant de r du fil, et son moment dipolaire $\vec{p}$ fait un angle α avec la direction du fil (Fig. E19).

2.1. Calculer la force exercée sur le dipôle.

2.2. Calculer le moment du couple agissant sur le dipôle.

3. Calculer l'énergie potentielle électrostatique du dipôle en interaction avec le champ créé par le fil chargé.

4. Déterminer les positions stables du dipôle lorsqu'il est maintenu à une distance fixe.

5. Après avoir pris l'orientation $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le dipôle se déplace de la distance r à $\frac{r}{2}$. Calculer la variation de l'énergie cinétique du dipôle.

Solution :

1. En utilisant les résultats de l'exercice 7, on obtient:

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

2. Le dipôle est placé dans un champ électrique non uniforme (inversement proportionnel à r). Il est soumis à une force électrostatique donnée par:

$$\vec{F} = \left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{grad}\right)\vec{E}(M)$$

En coordonnées cylindriques, l'expression de la force $\vec{F}$ s'écrit:

$$\vec{F} = \left[\left(p_r \vec{u}_r + p_\theta \vec{u}_\theta + p_z \vec{u}_z \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) \right] E(r) \vec{u}_r$$

Soit : $\vec{F} = \left[p_r \frac{\partial}{\partial r} \right] E(r) \vec{u}_r$

En remplaçant le champ $\vec{E}(r)$ par son expression, on obtient :

$$\vec{F} = \left[p_r \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \vec{u}_r = -\frac{p_r \lambda}{2\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Comme le dipôle et le fil sont dans un même plan, on a :

$$\vec{p} = p_r \vec{u}_r + p_z \vec{u}_z$$

avec $p_r = p \sin\alpha$ et $p_z = p \cos\alpha$

On obtient finalement :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{p\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r^2} \sin\alpha \, \vec{u}_r}$$

3. Le moment $\vec{L}$ du couple appliqué au dipôle est donné par :

$$\vec{L} = \vec{p} \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{L} = (p_r \vec{u}_r + p_z \vec{u}_z) \wedge E(r) \vec{u}_r$$

Soit : $\vec{L} = p_z E(r) \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = p_z E(r) \vec{u}_\theta$

Finalement :

$$\boxed{\vec{L} = \frac{p\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \cos\alpha \, \vec{u}_\theta}$$

– L'énergie potentielle du dipôle est donnée par :

$$\mathcal{E}_p(M) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(M) = -(p_r \vec{u}_r + p_z \vec{u}_z) \cdot E(r) \vec{u}_r = -p_r E(r)$$

Soit : $\mathcal{E}_p(M) = \mathcal{E}_p(r,\alpha) = -\frac{p\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \sin\alpha$

$$\boxed{\mathcal{E}_p(r,\alpha) = -p E(r) \sin\alpha}$$

4. Puisque le dipôle est maintenu à une distance r fixe, alors l'énergie potentielle ne dépend que de la variable α.

Les deux positions d'équilibre du dipôle correspondent aux extremums de l'énergie potentielle, c'est-à-dire à :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$$

- La position d'équilibre stable correspond à $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$
  - L'énergie potentielle y est minimale,

$$\left(\text{en effet } \left.\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = pE\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = pE > 0\right).$$

- La position d'équilibre instable correspond à $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$
  - L'énergie potentielle y est maximale,

$$\left(\text{en effet } \left.\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\frac{3\pi}{2}} = pE\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -pE < 0\right).$$

5. La variation de l'énergie cinétique du dipôle est égale au travail de la force électrostatique:

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_{c\,finale} - \mathcal{E}_{c\,initiale} = W = \int_r^{\frac{r}{2}} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Soit :

$$\Delta E_c = \int_r^{\frac{r}{2}} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_r^{\frac{r}{2}} -\frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \sin\alpha\, \vec{u}_r \cdot dr\,\vec{u}_r$$

$$= -\frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \sin\alpha \int_r^{\frac{r}{2}} \frac{dr}{r^2} = -\frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \sin\alpha \left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\frac{r}{2}} = \frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \sin\alpha \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right]$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\Delta E_c = \frac{p\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \sin\alpha}$$

Exercice 20*** – Force exercée sur un dipôle placé dans un champ électrique non uniforme

On considère un dipôle électrostatique, formé de deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$, séparées par une distance a. On place ce dipôle à une distance $r >> a$ d'une charge ponctuelle Q. Le dipôle est aligné avec le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par Q.

Déterminer la résultante des forces électrostatiques exercées sur le dipôle.

Solution :

1. La force exercée sur le dipôle est (Fig. E20) :

$$\vec{F} = q\vec{E}\left(\vec{r} + \vec{a}\right) - q\vec{E}\left(\vec{r}\right)$$

Où $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$

$\vec{E}$ est le champ électrique créé par la charge Q ; il varie en $\frac{1}{r^2}$.

D'où :

$$\vec{F} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(r+a)^2}-\frac{1}{r^2}\right)\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{a}{r}\right)^2}-1\right]\vec{u}_r$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\left[\left(1+\frac{a}{r}\right)^{-2}-1\right]\vec{u}_r$$

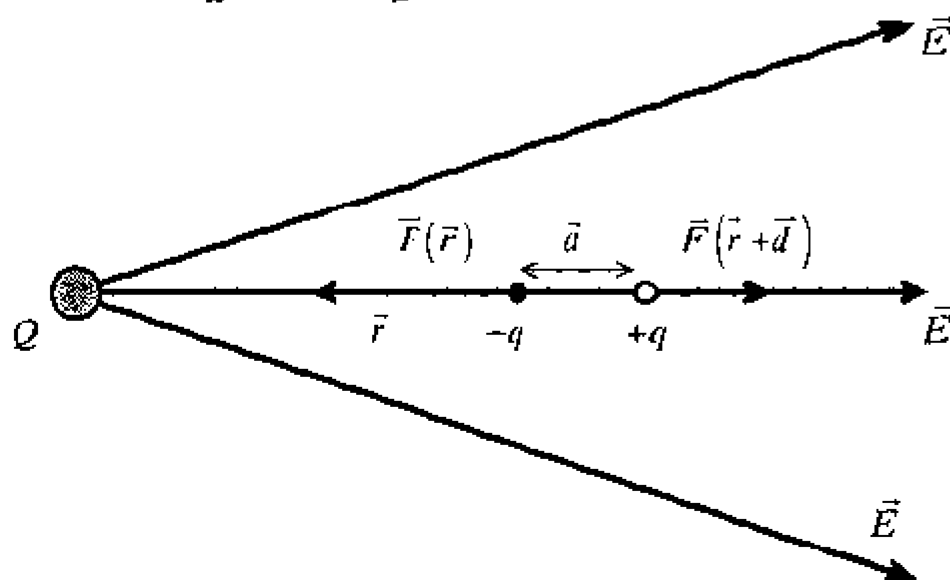


Fig. E20

Utilisons le développement en série :

$$(1\pm\varepsilon)^n = 1 \pm n\,\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\varepsilon^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\varepsilon^3 + \cdots$$

Pour $n=-2$, ce développement devient:

$$(1+\varepsilon)^{-2} = 1-2\varepsilon+3\varepsilon^2-4\varepsilon^3+\cdots$$

En négligeant les termes d'ordre 2 et plus, on obtient :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\left[\left(1-2\frac{a}{r}\right)-1\right]\vec{u}_r$$

Soit : $$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qQa}{r^3}\vec{u}_r}$$

La force $\vec{F}$ peut s'exprimer en fonction du moment dipolaire $\vec{p} = q\,a\,\vec{u}_r$:

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q\,p}{r^3}\vec{u}_r}$$

6. Conducteurs en équilibre

Exercice 21 — Liaison de deux conducteurs

Un double pendule est constitué par deux boules sphériques s conductrices de masse m, suspendues par deux fils conducteurs dont la longueur l est grande devant le rayon r des sphères. Les deux boules étant initialement neutres, on les relie, par l'intermédiaire d'un fil conducteur, très long et de capacité négligeable, avec une sphère conductrice S, de rayon R, initialement chargée. A l'équilibre mécanique, l'angle des deux pendules est 2α.

1. Exprimer, à l'équilibre du double pendule, la charge Q de la sphère S en fonction de l'angle α (Fig. E21).

2. On supprime le fil de jonction et on supposera que l'influence mutuelle, entre les sphères conductrices S et s, est négligeable. Déterminer le potentiel des deux pendules à l'équilibre.

***Application numérique* : $l = 12$ cm; $R = 60$ cm; $r = 6$ mm; $\alpha = 10^\circ$.**

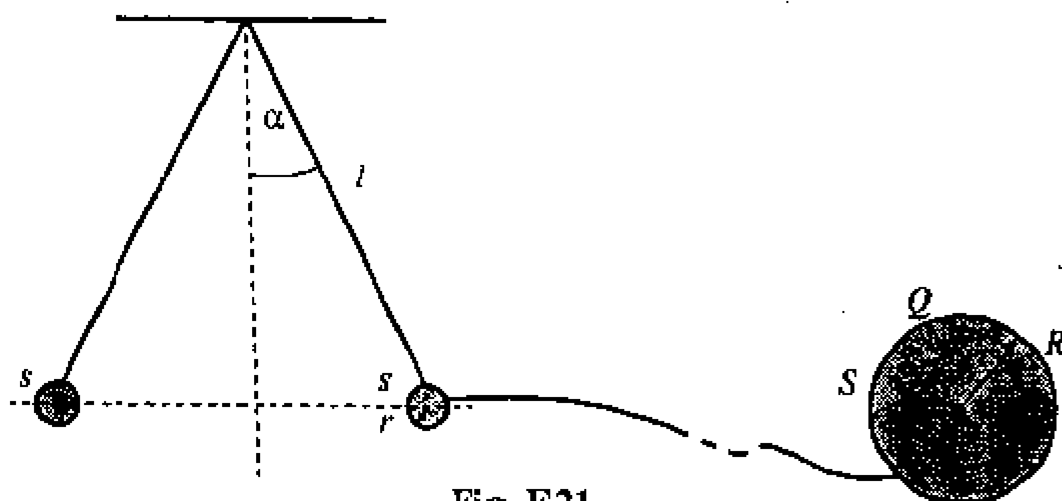


Fig. E21

Solution :

1. La sphère S porte initialement, une charge Q_0. Les deux boules sphériques s sont initialement neutres. Après connexion, chaque boule s prend une charge q, telle que:

$$2q+Q=0+Q_c=Q_0$$ (D'après le principe de conservation de la charge)

Les sphères s et S étant suffisamment éloignées pour ne pas s'influencer mutuellement, la répartition des charges sur chacune d'elles est uniforme.

A l'équilibre électrostatique, les deux boules sphériques s se repoussent en s'écartant d'un angle 2α. Par ailleurs, les sphères s et S forment, après connexion, un conducteur unique, de potentiel V':

$$V'_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}; \qquad V'_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

Les potentiels des deux sphères étant égaux:

$$V'_1=V'_2=V' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

Il en découle: $\dfrac{q}{r}=\dfrac{Q}{R}=\dfrac{2q+Q}{2r+R}=\dfrac{Q_0}{2r+R}$

Par conséquent,

$$q=Q_0\frac{r}{2r+R}\approx Q_0\frac{r}{R} \quad \text{et} \quad Q=Q_0\frac{R}{2r+R}\approx Q_0$$

Il en découle: $\boxed{q\approx Q\dfrac{r}{R}}$

Chaque sphère s, portant la charge q, est alors soumise à l'action de trois forces (Fig. E21.1):

- le poids $\vec{P}$, vertical et dirigé vers le bas;
- la force électrostatique $\vec{F}_e$, horizontale et répulsive;
- la tension du fil $\vec{T}$, dirigée le long du fil.

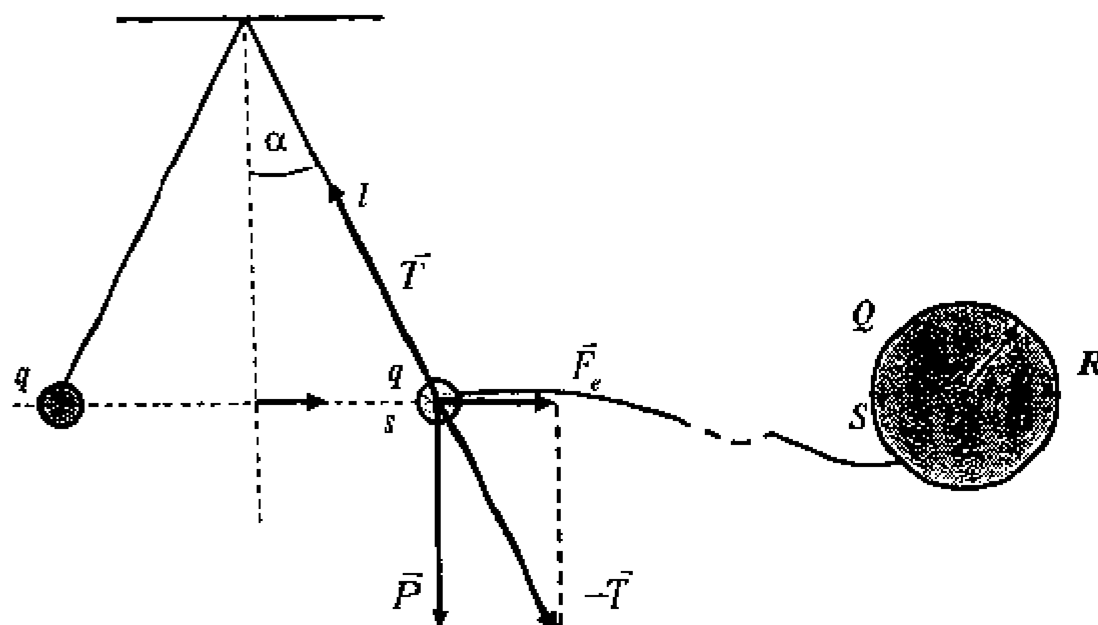


Fig. E21.1

A l'équilibre mécanique, la résultante de ces forces est nulle:

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_e=\vec{0}$$

Par conséquent, la condition d'équilibre mécanique du pendule s'écrit:

$$tg\theta=\frac{F_e}{P}$$

Il en découle: $F_e = P\,tg\,\theta$

Or, l'expression de la force électrostatique est: $\vec{F}_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{(2l\sin\alpha)^2}$

Par conséquent: $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{(2l\sin\alpha)^2}=mg\,tg\,\alpha$

Finalement, on obtient:

$$\boxed{q=\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\,4l^2\left(\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}\right)}}$$

On en déduit la charge Q de la sphère S: $\boxed{Q \simeq q\dfrac{R}{r}}$

Application numérique: $l = 12$ cm; $R = 60$ cm; $r = 6$ mm; $m = 0{,}3$ g; $\alpha = 10^\circ$.

$$q=\sqrt{\frac{1}{9\cdot10^9}\cdot0{,}3\cdot10^{-3}\cdot9{,}8\cdot4\cdot\left(12\cdot10^{-2}\right)^2\left(\frac{5{,}23\cdot10^{-3}}{0{,}985}\right)}=10^{-8}\,[C]\Rightarrow\ \boxed{q-10\ [nC]}$$

et $$Q\simeq10^{-8}\cdot\frac{60\cdot10^{-2}}{6\cdot10^{-3}}=10^{-6}\ [C]\ \Rightarrow\ \boxed{Q=1\ [\mu C]}$$

2. On déconnecte le fil de jonction. Les deux pendules sont identiques. Ils portent la même charge q et sont donc au même potentiel V.
Par application du principe de superposition, on exprime le potentiel au centre de l'un des pendules:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(2l\sin\alpha+2r)}$$

Sachant que $r << l\,sin\alpha$, on obtient:

$$\boxed{V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{2l\sin\alpha}\right)}$$

Application numérique: $l = 12$ cm; $R = 60$ cm; $r = 6$ mm; $m = 0{,}3$ g; $\alpha = 10^\circ$.

$$V=9\cdot10^9\cdot10\cdot10^{-9}\left(\frac{1}{6\cdot10^{-3}}+\frac{1}{2\cdot12\cdot10^{-2}\sin(10^\circ)}\right)\Rightarrow\ \boxed{V=17\ 160\ [V]}$$

Exercice 22 : — Champ et potentiel électrostatiques créés par un câble coaxial rempli d'air

Un câble coaxial, rempli d'air, de longueur h est formé par:

- un fil métallique de rayon R_1 portant une charge positive $+q$,
- une couche isolante d'air de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2,
- un cylindre métallique creux, de rayon R_2 coaxial au fil (Fig. E22).

1. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique $E(r)$ et le potentiel $V(r)$ dans l'isolant à la distance r de l'axe.

2. En déduire la capacité par unité de longueur du câble.

3. Calculer la différence de potentiel entre le fil et cylindre pour laquelle il apparaît une étincelle disruptive dans l'air.

Application numérique: R_1 = 1 mm; R_2 = 1 cm; $E_{max} = 3.10^6$ V.m^{-1} (*le champ électrique disruptif*).

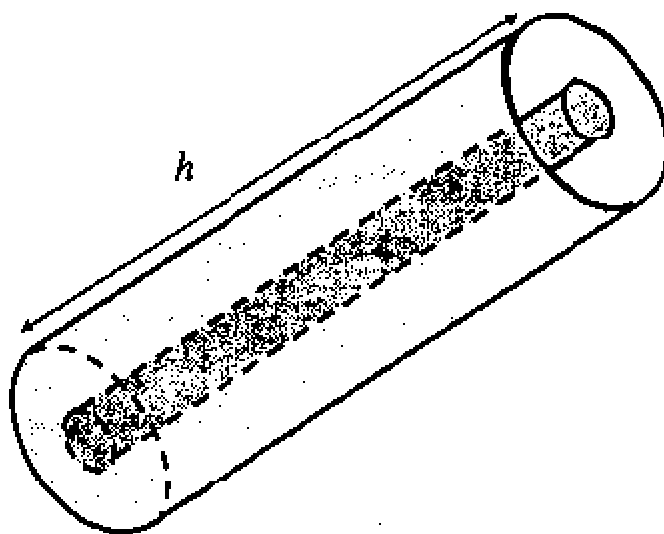


Fig. E22

Solution :

1. La distribution de charges possède une symétrie cylindrique. On choisit une surface de Gauss cylindrique fermée Σ, de même axe que le câble coaxial, de longueur h et de rayon r, ($R_1 < r < R_2$).

D'après le théorème de Gauss,

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = E\ 2\pi\ r\ l = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{q}{r}\ \vec{u}_r$$

Dans cette formule, la charge q est celle du fil métallique.
Le potentiel est déterminé par intégration:

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{q}{r} \Rightarrow dV(r) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 h} q \frac{dr}{r},$$

On obtient: $V(r) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 h_1} q \ln r + C$, où C est une constante.

Si V_1 est le potentiel du fil métallique, alors on a:

$$\boxed{V(r) = V_1 - \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 h_1} q \ln\frac{r}{R_1}}$$

2. Pour déterminer la différence de potentiel entre le fil et le cylindre, faisons circuler le champ de $r = R_1$ à $r = R_2$, le long d'une ligne de champ:

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} \quad \Rightarrow \quad \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\overrightarrow{dr}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}(\vec{u}_r.\overrightarrow{dr}) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}[\ln r]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{q}{C}$$

D'où la capacité:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

On en déduit la capacité par unité de longueur du câble:

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

3. Le champ électrique est maximal pour $r = r_{min} = R_1$. Son expression est:

$$E_{max} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{q}{R_1} \quad \Rightarrow \quad E_{max}R_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}$$

Dans ces conditions, la valeur maximale de la d.d.p. est:

$$(V_1 - V_2)_{max} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Soit: $$\boxed{(V_1 - V_2)_{max} = E_{max}R_1 \ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Application numérique: $R_1 = 1$ mm; $R_2 = 1$ cm; $E_{max} = 3.10^6$ V.m^{-1}.

$$(V_1 - V_2)_{max} = 3\cdot 10^6 \cdot 10^{-3}\ln\frac{10^{-2}}{10^{-3}} \Rightarrow \boxed{(V_1 - V_2)_{max} = 691\ [kV]}$$

Exercice E23** — Potentiels de conducteurs sphériques concentriques

1. Une sphère conductrice pleine A, de rayon $R_1 = 9$ cm, est seule dans l'espace et portée à un potentiel $V_0 = 6\ 600\ V$. Quelle est sa charge Q_0.

2. L'ayant isolée de la source, on entoure la sphère A par une autre sphère conductrice creuse B, concentrique, de rayon intérieur $R_2 = 11$ cm et $R_3 = 12$ cm, initialement neutre et isolée.

2.a. Calculer les charges portées par les sphères A et B.

2.b. Calculer les potentiels V_A et V_B des deux sphères.

2.c. Calculer la capacité du condensateur sphérique AB.

2.d. On relie les deux sphères conductrices à l'aide d'un fil métallique. Que deviennent les charges et les potentiels des deux sphères?

3. On considère deux sphères A et B identiques aux précédentes; la sphère A étant toujours isolée, on réunit B à un générateur qui la porte à un potentiel $V_1 = 5\ 400$ V.

3.a. Calculer les charges Q'_A et Q'_B des deux sphères conductrices.

3.b. Calculer le potentiel V'_A de la sphère A?

2. La sphère A est maintenant reliée au sol et on coupe B du générateur.

4.a. Calculer les charges Q''_A et Q''_B des deux sphères conductrices.

4.b. Déterminer le champ électrique $\vec{E}(r)$ en tout point M de l'espace, tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

4.c. Calculer le potentiel V''_B de la sphère B.

Solution :

1. Le potentiel V_0 de la sphère conductrice A est : $V_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_0}{R_1}$

On en déduit la charge Q_0 portée par la sphère conductrice A : $\boxed{Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V_0}$

Application numérique: $R_1 = 9.10^{-2}$ m; $V_0 = 1\ 800$ V.

$$Q_0 = \frac{1}{9\cdot10^9}\cdot 9\cdot10^{-2}\cdot 1\ 800 \quad\Rightarrow\quad \boxed{Q_0 = 18\ [\text{nC}]}$$

2.

2.a. Les conducteurs A et B sont en influence totale (Fig. E23.1)

$$\Rightarrow \qquad Q_A = Q_0 = 18\ [\text{nC}] \quad \text{et} \quad Q^B_{int} = -Q_A = -Q_0 = -18\ [\text{nC}]$$

La sphère conductrice B est neutre et isolée $\Rightarrow$ Conservation de la charge électrique totale

$\Rightarrow \quad Q_{ext}^{B} + Q_{int}^{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_{ext}^{B} = +Q_A = +Q_0 = 18\ [nC]}$

2.b. En présence des charges Q_{ext}^{B} et Q_{int}^{B}, le potentiel de la sphère conductrice A change, il devient:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_0}{R_1} - \frac{Q_0}{R_2} + \frac{Q_0}{R_3}\right)}$$

■ L'influence totale modifie le potentiel d'un conducteur isolé et maintient fixe sa charge électrique.

Le potentiel de la sphère conductrice B s'écrit:

$$\boxed{V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B^{ext}}{R_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R_3}}$$

2.c. En présence des charges Q_{ext}^{B} et Q_{int}^{B}, le potentiel de la sphère conductrice A change, il devient:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q}{r} \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_0}{R_1} - \frac{Q_0}{R_2} + \frac{Q_0}{R_3}\right)$$

■ L'influence totale modifie le potentiel d'un conducteur isolé et maintient fixe sa charge électrique.

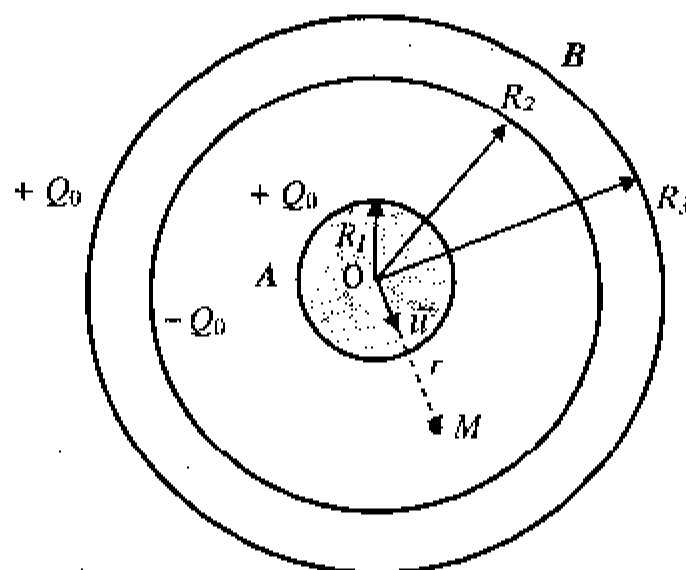


Fig. E23.1

Le potentiel de la sphère conductrice B s'écrit: $V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B^{ext}}{R_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R_3}$

Applications numériques: $R_1 = 9.10^{-2}$ m; $R_2 = 10.10^{-2}$ m; $R_3 = 11.10^{-2}$ m; $Q_0 = 18$ nC; $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}.

On obtient: $\boxed{V_A = 1\,652{,}72\ [V]}$ et $\boxed{V_B = 1\,472{,}72\ [V]}$

2.d. Considérons un condensateur formé par deux conducteurs concentriques. Le conducteur intérieur est une sphère de rayon R_1 (pour la sphère intérieure), le conducteur extérieur est compris entre les sphères de rayons R_2 et R_3 (Fig. E23.1).

La distribution de charges possède une symétrie sphérique. Aussi le champ et le potentiel créés varient de la même façon que dans le cas d'une charge ponctuelle.

Soit une surface de Gauss Σ de rayon r, $(R_1 < r < R_2)$. D'après le théorème de Gauss:

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{dS} = E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{r^2}\vec{u}$$

Dans cette formule, la charge Q_0 est celle du conducteur intérieur.

Pour déterminer la différence de potentiel entre les deux armatures du condensateur sphérique, faisons circuler le champ de $r = R_1$ à $r = R_2$, le long d'une ligne de champ:

$$dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl} \quad \Rightarrow \quad \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot\vec{dr}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\left(\vec{u}\cdot\vec{dr}\right) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] = \frac{Q_0}{C}$$

D'où la capacité:

$$\boxed{C = \frac{Q_0}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 0{,}1\ [nF]}$$

2.e. Lorsque l'on relie les deux sphères à l'aide d'un fil métallique, celles-ci forment alors un conducteur unique dont les charges intérieures Q'^{B}_{int} et Q'_A se neutralisent mutuellement. Par conséquent toute la charge électrique se répartit sur la surface extérieure de la sphère B et a pour valeur:

$$Q'_B = +Q'^{B}_{ext} = +Q'_A = +Q_0 = 18\ [nC]$$

Le potentiel de la sphère conductrice A change, il devient:

$$V'_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{0}{R_1} - \frac{0}{R_2} + \frac{Q_0}{R_3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R_3}$$

Le potentiel de la sphère conductrice B s'écrit : $V'_B = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_0}{R_3}$

■ $V'_A = V'_B = 1\,472{,}72\ [V]$ car le potentiel d'un conducteur unique est constant.

3.

3.a. Les conducteurs A et B sont en influence totale (Fig. E23.2)

$\Rightarrow \quad \boxed{Q''^{B}_{\text{int}} = -Q''_A = -Q_0 = -18\ [nC]}$

La sphère conductrice B est portée à un potentiel V_1 positif; en outre, elle est soumise à l'influence de la sphère $A \Rightarrow$ Il apparaît sur sa surface extérieure une charge Q''^{B}_{ext} positive.

La valeur de la charge Q''^{B}_{ext} est donnée par:

$$Q''^{B}_{ext} = 4\pi\varepsilon_0 R_3 V_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q''^{B}_{ext} = 33\ [nC]}$$

La charge totale portée par la sphère B est égale à:

$$Q''_B = Q''^{int}_B + Q''^{ext}_B = -18 + 33 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q''_B = 15\ [nC]}$$

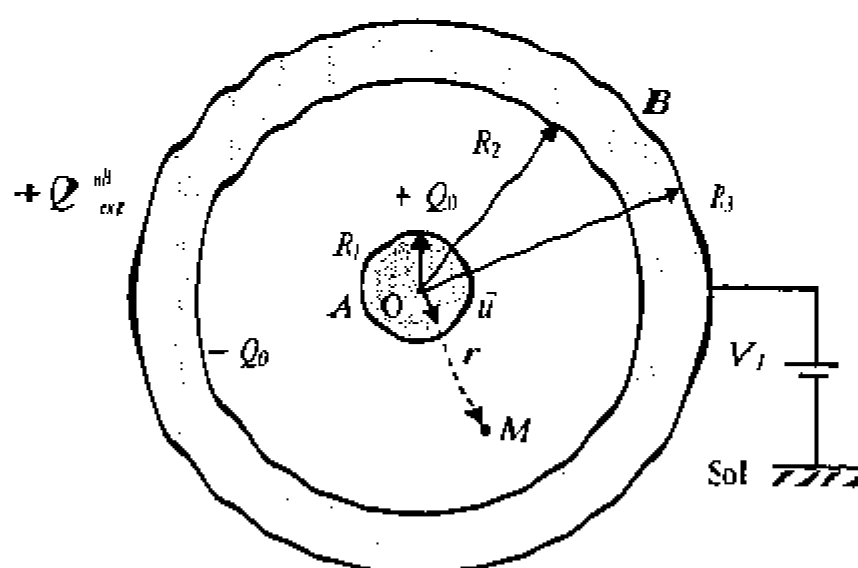


Fig. E23.2

3.b. En présence des charges $Q^{''B}_{ext}$ et $Q^{''B}_{int}$, le potentiel de la sphère conductrice A change, il devient:

$$V''_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V''_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_0}{R_1} - \frac{Q_0}{R_2} + \frac{Q^{''B}_{ext}}{R_3}\right)}$$

Application numérique: $R_1 = 9.10^{-2}$ m; $R_2 = 10.10^{-2}$ m; $R_3 = 11.10^{-2}$ m; $Q_0 = 18$ nC; $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}.

On obtient: $\boxed{V''_A = 2\,880\,[V]}$

4.

4.a. Le conducteur A se charge (Cf. 3.b); il porte la charge: $\boxed{Q''_A = Q_1}$

Les conducteurs A et B sont en influence totale (Fig. E24.3) $\Rightarrow$ $\boxed{Q^{''B}_{int} = -Q_1}$

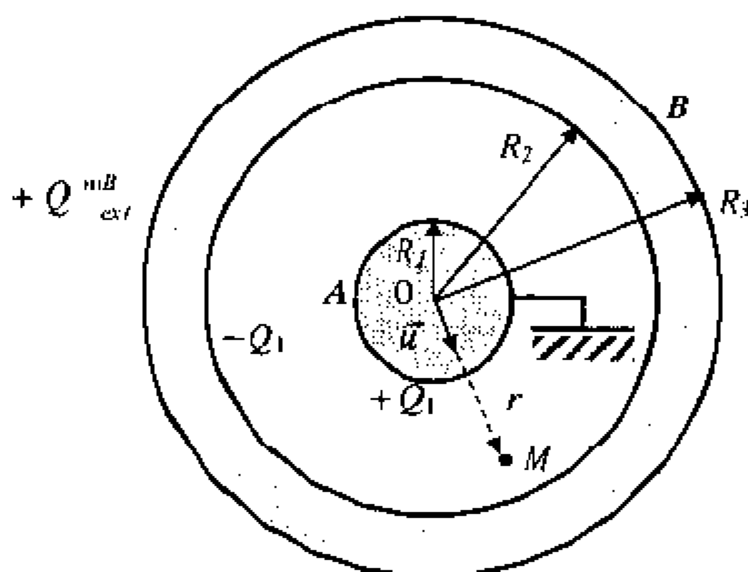


Fig. E23.3

La sphère conductrice B est chargée et isolée $\Rightarrow$ Conservation de la charge électrique totale.

$$\Rightarrow \qquad Q''_{int} + Q''_{ext} = Q''_B \qquad \Rightarrow \qquad Q''^{B}_{ext} = Q''_B + Q_1$$

4.b. La distribution de charges présente une symétrie sphérique. Nous avons vu dans le cours, que le champ électrique est radial: $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$. Donc, en raison de la symétrie du champ électrique, on choisit comme surface de Gauss une sphère de rayon r et de centre O.

– $0 < r < R_1$:

Choisissons une surface de Gauss sphérique Σ_1 de rayon $0 < r < R_1$; l'application du théorème de Gauss permet d'écrire:

$$\oiint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

– $R_1 < r < R_2$:

Lorsque A est relié au sol par un fil fin de capacité négligeable, un champ électrique existe entre les armatures A et B, car leur différence de potentiel $V_A - V_B = -V_B$ n'est pas nulle.

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = V_B > 0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} < 0$$

Il en découle que le champ électrique est dirigé vers les potentiels décroissants, c'est-à-dire de B vers A.

Choisissons maintenant une surface de Gauss Σ_2 située dans l'espace interconducteur (Σ_2 comprise entre A et B); l'application du théorème de Gauss permet d'écrire:

$$\oiint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = -\oiint_{\Sigma_2} E\, dS\, \vec{u}_r \cdot \vec{n} = -\oiint_{\Sigma_2} E\, dS = -E\, S = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad Q_1 < 0,$$

Donc, le conducteur A se charge négativement.

D'après ce qui précède, on obtient:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1|}{r^2}\vec{u}_r; \text{ le champ électrique } \vec{E}(r) \text{ est dirigé de } B \text{ vers } A.$$

– $R_2 < r < R_3$:

Choisissons cette fois ci, une surface de Gauss sphérique Σ_3 de rayon $R_2 < r < R_3$; l'application du théorème de Gauss permet d'écrire:

$$\oiint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_0 - Q_0}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \vec{E}(r) = \vec{0}$$

– $R_3 < r$:

Choisissons encore une surface de Gauss sphérique Σ_4 de rayon $r > R_3$; l'application du théorème de Gauss permet d'écrire:

$$\oiint_{\Sigma_4} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q''^{ext}_{B}}{\varepsilon_0} = \frac{Q''_B + Q_1}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E\, 4\pi r^2 = \frac{Q''_B + Q_1}{\varepsilon_0}$$

Finalement, on obtient:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B'' + Q_1}{r^2}\vec{u}_r$$

Pour déterminer la charge Q_1, on exprime la circulation du vecteur champ électrique $\vec{E}_{ext}$ le long d'une ligne de champ entre un point M situé sur le conducteur B et un point situé à l'infini:

$$\Delta V = V(\infty) - V(R_3) = -\int_{R_3}^{\infty}\vec{E}\cdot\vec{dr} = -\int_{R_3}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B'' + Q_1}{r^2}dr$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(Q_B'' + Q_1\right)\left[\frac{1}{r}\right]_{R_3}^{\infty} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B'' + Q_1}{R_3}$$

avec: $V(\infty) = 0$ et $V(R_3) = V_B''$

Il s'ensuit: $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_3 V_B'' - Q_B''$

4.c. Pour déterminer le potentiel V_B''', on exprime la circulation du vecteur champ électrique $\vec{E}_{ext}$ le long d'une ligne de champ, de $r = R_1$ à $r = R_2$:

$$\int_0^{V_B''} dV = -\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot\vec{dr} = -\int_{R_1}^{R_2} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1|}{r^2}\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r\,dr$$

$$+V_B'' = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}|Q_1|\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

On obtient: $V_B'' = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right]$

Puisque $Q_1 < 0$, on peut écrire: $V_B'' = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right]$

On en déduit l'expression de la charge Q_1 portée par la sphère A:

$$Q_1 = -\frac{Q_B'' R_1 R_2}{\left[R_1 R_2 + R_3(R_2 - R_1)\right]}$$

Applications numériques: $R_1 = 9.10^{-2}$ m; $R_2 = 10.10^{-2}$ m; $R_3 = 11.10^{-2}$ m; $Q''_B = 15$ nC; $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}.

$$Q_1 = -\frac{15\cdot10^{-9}\cdot9\cdot10^{-2}\cdot10\cdot10^{-2}}{\left[9\cdot10^{-2}\cdot10\cdot10^{-2} + 11\cdot10^{-2}\cdot(1\cdot10^{-2})\right]} \Rightarrow Q_1 = -13{,}366\ [nC]$$

$$Q_{ext}^{''B} = 15 - 13{,}366 \Rightarrow Q_{ext}^{''B} = 1{,}634\ [nC]$$

$$V_B'' = 13{,}366\cdot10^{-9}\cdot9\cdot10^{9}\cdot\left[\frac{(10-9)\cdot10^{-2}}{9\cdot10\cdot10^{-4}}\right] \Rightarrow V_B'' = 133{,}7\ [V]$$

Vérification: $V_B^{"} = \frac{Q_B^{"} + Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_3}\right] \Rightarrow V_B^{"} = 1,634 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{9 \cdot 10^9}{11 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \boxed{V_B^{"} = 133,7\ [V]}$

Exercice E24 — Coefficients d'influence

On considère deux sphères métalliques S_1 et S_2, ayant respectivement pour centres O_1 et O_2, et pour rayons R_1 et R_2. Elles portent respectivement les charges Q_1 et Q_2. Les deux sphères sont placées à une grande distance l'une de l'autre ($O_1O_2 = a$, avec $a >> R_1$ et $a >> R_2$).

1. Calculer les potentiels aux centres O_1 et O_2 des sphères.

2. En exprimant les potentiels en fonction des charges des conducteurs, on arrive à une relation de la forme:

$$V_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} Q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Déterminer les coefficients P_{ij} de la matrice $[P]$ du système.

3. En déduire la matrice $[C]$ du système; exprimer les coefficients de capacités et d'influence des deux sphères. Comparer le coefficient de capacité C_{11} à la capacité d'une sphère seule, isolée dans l'espace.

***Applications numériques*: $R_1 = R_2 = 6$ cm; $a = 60$ cm.**

Solution :

1. Le potentiel de la sphère S_1 s'écrit:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q}{r} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{a}\right)$$

Le potentiel de la sphère S_2 s'écrit:

$$\boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{a}\right)}$$

2. Il en découle de la question précédente, le système d'équations:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} Q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} Q_2 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} Q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} Q_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$$

Il s'en suit en écriture matricielle:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [P]\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{soit:} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

3. Les deux sphères conductrices S_1 et S_2 en influence mutuelle, sont portées respectivement aux potentiels V_1 et V_2. On obtient l'état d'équilibre du système:

$$V_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2$$
$$V_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$$

La correspondance entre les potentiels et les charges peut être représentée dans l'écriture matricielle, comme suit:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [P]\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}; \qquad \text{soit:} \qquad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

La matrice $[C]$ des coefficients d'influence est l'inverse de la matrice $[P]$. Cette matrice est inversible, car son déterminant est non nul.

Calcul du déterminant Δ:

$$\Delta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{R_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left[\frac{1}{R_1R_2} - \frac{1}{a^2}\right] = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\frac{a^2 - R_1R_2}{a^2R_1R_2}\right) \neq 0$$

Le système d'équations précédent peut être résolu de façon unique:

$$Q_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \\ V_2 & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{vmatrix}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{R_2} \end{vmatrix}} \quad ; \qquad Q_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} & V_1 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} & V_2 \end{vmatrix}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{R_2} \end{vmatrix}}$$

où sous une forme plus explicite:

$$Q_1 = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}}{\Delta} V_1 - \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}}{\Delta} V_2 ; \qquad Q_2 = -\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 x}}{\Delta} V_1 + \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}}{\Delta} V_2$$

$$C = P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}}{\Delta} & -\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}}{\Delta} \\ -\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 x}}{\Delta} & \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 a^2}{a^2 - R_1R_2} & -\frac{4\pi\varepsilon_0 a R_1R_2}{a^2 - R_1R_2} \\ -\frac{4\pi\varepsilon_0 a R_1R_2}{a^2 - R_1R_2} & \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 a^2}{a^2 - R_1R_2} \end{pmatrix}$$

On en déduit les coefficients de capacité et d'influence:

$$C_{11}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 a^2}{a^2-R_1R_2};\qquad C_{22}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 a^2}{a^2-R_1R_2};$$

$$C_{12}=C_{21}=-\frac{4\pi\varepsilon_0 a R_1 R_2}{a^2-R_1R_2}.$$

Puisque a est grand devant R_1 et R_2, on obtient:

$$C_{11}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 a^2}{1-\frac{R_1R_2}{a^2}}\approx 4\pi\varepsilon_0 R_1\left(1+\frac{R_1R_2}{a^2}\right)$$

$$C_{22}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 a^2}{1-\frac{R_1R_2}{a^2}}\approx 4\pi\varepsilon_0 R_2\left(1+\frac{R_1R_2}{a^2}\right)$$

$$C_{21}=C_{12}=-\frac{4\pi\varepsilon_0 aR_1R_2}{a^2\left(1-\frac{R_1R_2}{a^2}\right)}=-4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{a}\left(1+\frac{R_1R_2}{a^2}\right)\approx-4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{a}$$

Applications numériques: $R_1=R_2=6$ cm; $a=60$ cm.

$$C_{11}\approx\frac{1}{9\cdot10^9}\cdot6\cdot10^{-2}\cdot\left(1+\frac{36\cdot10^{-4}}{36\cdot10^{-2}}\right)\Rightarrow C_{11}=9{,}07\cdot10^{-12}[F]=9{,}07\ [pF]$$

$$C_{22}=9{,}07\cdot10^{-12}\,[F]=9{,}07\ [pF]$$

$$C_{12}=C_{21}\approx-\frac{1}{9\cdot10^9}\cdot\frac{6\cdot10^{-2}\cdot6\cdot10^{-2}}{36\cdot10^{-2}}$$

$$C_{12}=C_{21}=-1{,}11\cdot10^{-12}\,[F]=-1{,}11\ [pF]$$

Exercice E24** — Electromètre à plateaux

Un électromètre, représenté schématiquement sur la figure P24, est utilisé pour mesurer des différences de potentiel. Il se compose d'une balance dont le plateau de gauche est un disque D de surface S placé à une distance a d'un plateau P horizontal, constituant ainsi un condensateur plan. Les armatures D et P sont respectivement aux potentiels V_D et V_P.

1. Calculer l'énergie électrostatique du système.

2. Quand une différence de potentiel est appliquée entre le disque et le plan, une force verticale dirigée vers le bas agit sur le disque. Déterminer la force F qui s'exerce sur le disque D. Quelle est son intensité, sachant que $V_D=V_0$ et $V_P=0$ (Fig. E25).

3. Dans les conditions précédentes, quelle charge m faut-il placer sur l'autre plateau pour maintenir l'équilibre.

Remarque: dans l'instrument réel, le disque est entouré d'un anneau de garde porté au même potentiel, pour faire en sorte que le champ soit uniforme, sur toute la surface du disque.

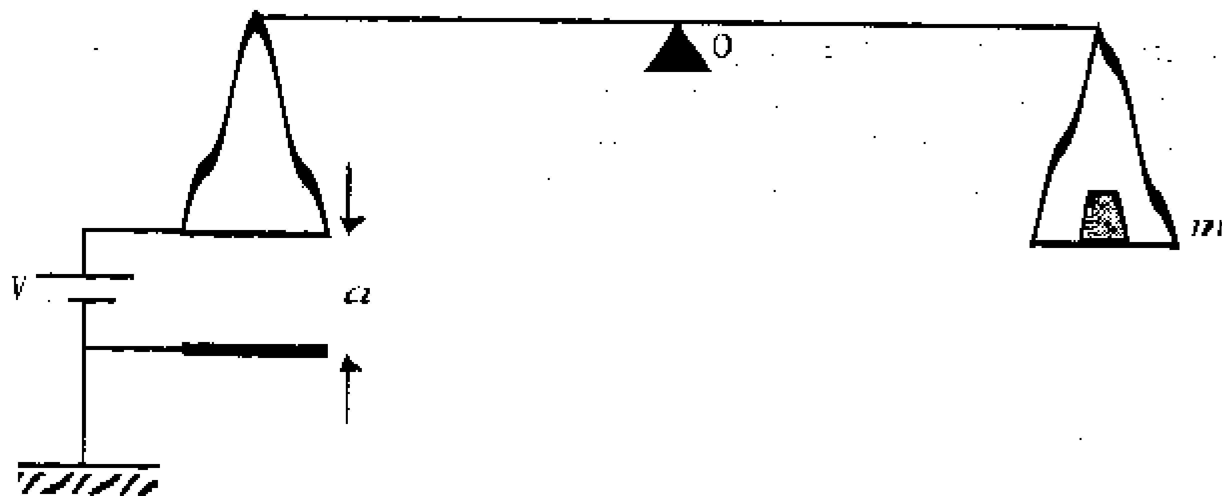


Fig. E25

Solution :

1. Le disque D et le plateau P constituent les armatures d'un condensateur plan de capacité (Cf. cours):

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{a}}$$

L'énergie électrostatique du système est: $\boxed{\mathcal{E}_E = \frac{1}{2} C \left(V_D - V_P\right)^2}$

2. Les deux armatures du condensateur sont l'une le disque D, protégé électriquement par un anneau de garde et l'autre, le plateau P. La charge du disque D est:

$$Q = \frac{\varepsilon_0 S}{a}\left(V_D - V_P\right)$$

Elle est répartie uniformément avec la densité surfacique:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\varepsilon_0}{a}\left(V_D - V_P\right)$$

L'influence étant totale, il apparaît sur la surface du plateau P, une charge électrique égale et opposée, répartie uniformément avec la densité $-\sigma$.

La charge de P crée un champ électrique uniforme $\vec{E}(P) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$ normal aux armatures, dirigé de l'armature D (positive) vers l'armature P (négative). L'action de ce champ sur la charge répartie sue le disque D est équivalente à une force $\vec{f}$ passant par le centre du disque, telle que:

$$\vec{f} = Q_D \vec{E}(P) = \sigma S\, \vec{E}(P) = -\frac{S\,\varepsilon_0}{2}\vec{n}\ ; \quad \text{ici} \quad \vec{n} = \vec{k}$$

Soit:

$$\boxed{\vec{f} = -\frac{\varepsilon_0 S}{2\,a^2}\left(V_D - V_P\right)^2 \vec{k} = -\frac{\varepsilon_0 S}{2\,a^2} V_0^{\,2}\,\vec{k}}$$

La force entre les armatures est toujours attractive, car elle est proportionnelle au carré de la d.d.p. appliquée entre les armatures du condensateur plan.

3. Lorsque la différence de potentiel $(V_D - V_P) = V_0$ est appliquée, pour une distance a entre les armatures, il apparaît une force d'attraction verticale entre les armatures; on établit l'équilibre de la balance à l'aide de masses marquées m.

La balance est en équilibre (de rotation) lorsque la somme des moments de rotation par rapport à O est nulle:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{f/O}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{P/O}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad +f \cdot l - p \cdot l = 0 \quad \text{où } l \text{ est le fléau de la balance.}$$

Il en découle:

$$\frac{\varepsilon_0 S}{2a^2}(V_D - V_P)^2 = mg$$

Par conséquent:

$$\boxed{m = \frac{\varepsilon_0 S}{2a^2 g}(V_D - V_P)^2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2a^2 g}V_0^2}$$

Achevé d'imprimer

sur les presses de

Mitidja Impression, Alger.

ELECTRICITE
1 ELECTROSTATIQUE

Exercices corrigés
Mohamed AKBI

L'ouvrage

Ce recueil de 25 exercices d'électrostatique complète parfaitement le livre de cours. Il offre à l'étudiant un outil efficace d'entraînement et de révision.

Pour bien utiliser cet ouvrage, l'étudiant doit:

- maîtriser parfaitement les bases du cours;
- acquérir progressivement une méthode pour analyser et résoudre les exercices;
- chercher par lui-même chaque solution et la comparer avec celle proposée dans cet ouvrage.

Ainsi, l'étudiant pourra s'auto-évaluer et profiter pleinement de ce recueil.

Le public : étudiants de licence et d'ingéniorat.

L'auteur :

Mohamed AKBI : Docteur d'état, enseigne actuellement la Physique au premier cycle universitaire et en ingéniorat; il poursuit des recherches sur les pieds d'arc électrique.

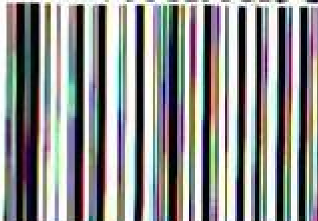
Pour plus d'exercices corrigés (150) d'électrostatique, consultez les ouvrages rédigés par le même auteur dans la collection ***Physique +***.







ISBN 996195815-2



PRIX PUBLIC : 150 DA

Universités - Grandes Ecoles